

LOS PROBLEMAS ASOCIADOS A LA COMPRESIÓN DEL ÁLGEBRA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS¹

William Oswaldo Flores López²

*Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense URACCAN
Nueva Guinea-Nicaragua.*

Fecha de recepción Marzo 02, 2015

Fecha de aceptación Mayo 25, 2015

RESUMEN

En este trabajo se presenta el análisis de un cuestionario de evaluación que exploró y caracterizó los problemas asociados a la comprensión del álgebra en 258 estudiantes universitarios. Los resultados indican que: el índice de dificultad oscila entre muy fácil y muy difícil; el índice de homogeneidad de los ítems varía entre -0,08 a 0,62; el juicio de experto dio como resultado que los ítems evalúan las categorías de contenidos; la confiabilidad del instrumento es del 0,90; el análisis factorial extrae cuatro niveles de comprensión del álgebra que explican el 70,65% de la varianza; el análisis de las puntuaciones medias muestra que existe diferencias significativas y, en todos los casos, los estudiantes de la especialidad de Contabilidad Pública y Auditoría registran puntuaciones más altas con respecto a las demás especialidades. Se concluye que la adaptación y estandarización del cuestionario sobre la comprensión del álgebra permite visualizar los problemas del álgebra, como parte de un engranaje global frente al cual se puede aplicar en contexto diversos.

Palabras Claves: Comprensión, Problemas del Álgebra, Índice de Dificultad, Índice de Homogeneidad, Confiabilidad, Análisis Factorial, Análisis de Medias.

PROBLEMS ASSOCIATED WITH THE COMPREHENSION OF ALGEBRA IN UNIVERSITY STUDENTS

ABSTRACT

This paper presents the analysis of an assessment questionnaire that explores and characterizes the problems associated with comprehension of Algebra, in 258 University students. The results indicate that: the difficulty index lies between very easy and very difficult; the homogeneity index for items varies between -0.08 and 0.62; experts evaluate that the questionnaire represents all categories of algebra content; the reliability found was 0.90; the factor analysis results in four comprehension levels to explain 70.65% of the variance found; the analysis of means shows significant differences; and, for all cases, students in Public Accounting and Auditing gain higher points when compared to other specializations. We conclude that the adaptation and standardisation of this questionnaire about algebra comprehension allows us to visualize algebra problems, being part of a worldwide exchange with application in various contexts.

Keywords: Comprehension Algebra problems, Difficulty index, Homogeneity index, Reliability, Factor analysis, Analysis of means.

How to cite/Cómo citar:

Florez, W.O. (2015). Los problemas asociados a la comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Revista Horizontes Pedagógicos* 17(1), 8-23.

- 1 Investigación realizada en la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense sobre Tipos de obstáculos y errores ligados al aprendizaje de las matemáticas de estudiantes universitarios en contexto de diversidad.
- 2 Máster en Investigación en Didácticas de las Ciencias Experimentales y Matemáticas. Profesor de Matemáticas en la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense, Recinto Universitario Nueva Guinea. william.flores@uraccan.edu.ni.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas que se requieren en las especialidades de Ciencias Administrativas e Informática, demandan del estudiante una gran capacidad de abstracción. Los conceptos que las constituyen son complejos y muy estructurados, lo que hace que su comprensión se dificulte si no se sustenta sobre una base muy sólida constituida por las ideas más elementales del álgebra y de la geometría. El caso del álgebra es particularmente importante. Esta área es básica para un buen manejo de las nociones de las matemáticas aplicadas (cálculo diferencial, cálculo integral, matemática financiera, estadística), por lo cual se dedica mucho tiempo de enseñanza y aprendizaje al nivel de secundaria. Sin embargo, los estudiantes que ingresan a la universidad aún se encuentran con dificultades asociadas a la comprensión y manejo de los conceptos elementales. Los resultados de los exámenes de admisión y los cursos propedéuticos de las Universidades Nicaragüenses muestran que sus conocimientos de álgebra son insuficiente (Gil, 2011).

La identificación de los problemas específicos que encuentran los estudiantes en los contenidos de álgebra y de sus causas, así como la búsqueda de formas alternativas de enseñanza diseñadas para superar estos problemas son temas que aún requieren de investigación. Con el fin de profundizar en la comprensión de las dificultades a las cuales se enfrentan los estudiantes que ingresan a las carreras de Ciencias Administrativa e Informática para la solución de problemas algebraicos, es conveniente poner atención a un concepto central de esta área: la interpretación de la letra en contextos algebraicos. El trabajo que aquí se presenta se origina del interés de determinar los tipos de obstáculos y errores ligados al aprendizaje de las matemáticas de estudiantes universitarios en contexto de diversidad. Para iniciar este análisis preliminar se consideró pertinente utilizar el cuestionario de Küchemann (1981) que permite obtener un perfil inicial de los estudiantes en cuanto a su desempeño con respecto a problemas que requieren interpretar, manipular y simbolizar la letra en sus diferentes

manifestaciones para, posteriormente, llevar a cabo análisis más profundo al respecto.

Los problemas asociados al pensamiento algebraico son estudiados en diferentes trabajos Kieran y Filloy (1989), Kieran (1992), Kaput (1999), Janvier (1987), Duval (1993), Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Bolea, Bosch y Gascón (2001), Godino (2002), Godino, Batanero y Font (2007) y se tipifican de la siguiente manera:

Desde la perspectiva de la psicología cognitiva, Kieran y Filloy (1989) han identificado los factores que influyen sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra, que ponen de manifiesto las consecuencias de considerar el álgebra como aritmética generalizada. El enfoque lingüístico estudiado por Janvier (1987), Kaput (1999) y Duval (1993) se considera al lenguaje algebraico como el lenguaje básico de las matemáticas, centrado el interés en el estudio de los sistemas de representación semióticos que constatan la necesidad de aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente se logra sin la adquisición de diversas representaciones semióticas del mismo. Los estudios de Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Bolea, Bosch y Gascón (2001), Godino (2002), Godino, Batanero y Font (2007) que realizan desde el enfoque antropológico y ontosemiótico, dichos estudios adoptan un punto de vista pragmático, centrado en el análisis del significado de los objetos matemáticos tanto a nivel institucional como personal, estudiando los fenómenos derivadas de la transposición didáctica escolar tratando de integrar los aspectos sintácticos, semánticos, pragmáticos y socioculturales.

Como problemas específicos del proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra se identifican los trabajos realizados por Brousseau (1983), Palarea y Socas (1994), Socas (1997), Kieran (1997), Pizón y Gallardo (2000), Vicario (2002) y Cajaraville et al., (2012), donde tratan de encontrar soluciones a preguntas como: ¿Qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes en los niveles de comprensión del álgebra? Esta percepción se puede agrupar en los siguientes núcleos:

Los obstáculos epistemológicos y didácticos que constituyen una fuente de errores sistemáticos y persistentes que deben superarse para lograr nuevos aprendizajes (Brousseau, 1983). Palarea y Socas (1994) tipifica tres tipos de errores: (a) los que se originan por la existencia de obstáculos; (b) los errores del álgebra que están en la aritmética; y (c) los debidos a las características propias del lenguaje algebraico. También Socas (1997), puntualiza tres tipos de errores: (a) un obstáculo cognitivo; (b) ausencia de sentido de los sistemas de representación; y (c) actitudes afectivas y emocionales. En los estudios de Kieran (1997), se señala que en los problemas del álgebra elemental, en los que se presenta la variable como un valor desconocido que se debe localizar, las demandas conceptuales de los estudiantes se centran en: (1) comprender las letras como objeto que se usan para representar incógnitas, números generalizados y relaciones entre cantidades; (2) traducir los problemas a modelos algebraicos, basados en ecuaciones que representan las cantidades desconocidos y los otros datos del problema, según relaciones explícitas o implícitas en el enunciado de la tarea; y (3) resolver dichas ecuaciones. Estas demandas generan dificultades de aprendizaje en muchos estudiantes.

Otras problemas son mencionados en Pizón y Gallardo (2000) al intentar comprender: (a) la concatenación de términos algebraicos, en relación con la del sistema de numeración; (b) transformaciones entre números positivos y negativos en expresiones algebraicas; (c) inversión incorrecta de las operaciones (transposición de términos en una ecuación); (d) diferencia de la incógnita respecto a su coeficiente. Hay que destacar las aportaciones del estudio exploratorio de Vicario (2002) sobre las ideas asociadas a la variable con estudiantes de educación media y educación superior, muestran la escasa presencia de la idea de variable concebida como una magnitud, es decir, asociada a una representación geométrica (longitud, área, volumen). Se tiene una concepción de variable asociada a las letras y afloran concepciones alternativas en plano gráfico y conjuntista al plantear situaciones de variación; los estudiantes manifestaron dificultades en la comprensión de la noción de

variable en los problemas que se les plantearon. Dificultades asociadas a los procesos de evolución del pensamiento algebraico en los estudiantes, que provocan que los conocimientos adquiridos, en una determinada etapa, se conviertan en modelos implícitos inadecuados para adquisición de nuevos conocimientos (Cajaraville, et al., 2012).

Según Godino y Font (2004) y Cajaraville et al. (2012) las primeras experiencias con el razonamiento algebraico están relacionadas con la aritmética generalizada y estas experiencias de los estudiantes con la aritmética son importantes para la comprensión progresiva del lenguaje algebraico, y el concepto matemático que hace posible esta generalización es el de variable. Así, el uso de las letras en matemáticas parece ser ineludible, la simbología literal es un recurso potente que facilita la resolución de problemas. Sin embargo, a las letras suele darse diferentes usos. Autores como Küchemann (1980), Enfedaque (1990), Azarquiel (1991), Ursini y Triqueros (1998), Usiskin (1999), Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo, y Mora (1999) y Kieran (2006), ponen de manifiesto que la interpretación y comprensión del uso de letra en contextos algebraicos, progresa mediante las etapas:

La letra evaluada: A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido. Por ejemplo, Si entonces.

Letra no usada: Aquí la letra se ignora, o a lo más es reconocida (pero sin dar un significado). Por ejemplo, Si multiplicado por 4 puede ser escrito por . Multiplica por 4 la expresión.

Letra como objeto: La letra es vista como un nombre para un objeto, o como el objeto propiamente dicho. Por ejemplo, Una manzana cuesta C\$15 córdobas y una pera C\$ 20 córdobas. Si “x” es el número de manzanas y “y” el número de peras. ¿Qué representa la expresión ?

La letra como incógnita: Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el estudiante se lanza a operar con letra vista de esta manera, a pesar de la falta de cerradura del resultado. Por ejemplo, ¿Cuánto es verdadera

la siguiente expresión?: . Subraya la respuesta correcta: siempre; nunca; a veces; cuando, ...

La letra como número generalizado: La letra se ve como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor específico. Por ejemplo, ¿Qué puede decirse acerca de si y es menor ?

Letra como variable: La letra como variable representa un rango de valores y el estudiante es capaz de describir el grado con el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro (lo cual significa establecer al menos una relación de segundo orden). Por ejemplo, Si ¿Qué pasa con si se incrementa en 2?

Letra usada como relación funcional: en donde la letra x varía en determinado conjunto de números y, para cada valor de x, está ligada a este valor mediante la relación expresada por (Cajaraville et al., 2012, p. 25).

La importancia que tiene lograr la comprensión en la generalización que desempeña la letra como variable, es una tarea difícil para muchos estudiantes, lo que se observa a través de los numerosos errores (conceptuales, procedimentales y estructurales) que cometen los estudiantes, han sido plasmados en diferentes investigaciones y documentos curriculares de amplia difusión internacional, como por ejemplo, Küchemann (1980), Furinghetti y Paula (1994), Schoenfeld y Arcavi (1999), Usiskin (1999), NCTM (2000), Bardini, Radford y Sabena (2005), Trigueros y Ursini (2006) entre otros.

METODOLOGÍA

El enfoque de esta investigación es cuantitativo ya que este paradigma ayudó al tratamiento de la información de los datos a través de la categorización y descripción de las propiedades, características y los perfiles de las personas, grupos, comunidades, procesos y objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (Hernández, Fernández & Baptista, 2010). Mientras que el diseño que se instauró es un diseño Ex post Facto, ya que se analizaron los fenómenos que ocurrieron en forma natural, pero midiendo diversas variables para analizar su posible efecto (Bisquerra, 2009).

Participantes

La aplicación del cuestionario se llevó a cabo con una muestra de 258 estudiantes de tres grados en Ciencias Administrativa e Informática (Administración de Empresas, Contabilidad Pública y Auditoría y Informática Administrativa) de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense pertenecientes a comunidades de la Costa Caribe de Nicaragua. La selección de especialidad se realizó mediante un muestro aleatorio estratificado tomando como estrato de selección la especialidad y ser estudiante de primer ingreso. La edad media de los participantes fue de 18 años, con un rango de edad comprendido entre los 16 y los 19 años. El 35% de los participantes fueron hombres y el 65% restantes fueron mujeres. La distribución por especialidad se resume en la tabla 1.

Tabla 1: Distribución por especialidad

		Hombres	Mujeres	Total	%
Válidos	Informática Administrativa	38	55	93	36
	Administración de Empresas	40	73	113	44
	Contabilidad Pública y Auditoría	13	39	52	20
	Total	91	167	258	100%
	%	35	65		

Fuente: Elaboración propia.

Variables e instrumentos

El instrumento para recolectar la información fue el cuestionario de problemas de comprensión del álgebra de Küchemann (1981), el cual nos permitió analizar los problemas relacionados a los niveles de comprensión del álgebra a través de dimensiones que posibilitan reconocer niveles de desarrollo de los estudiantes, a saber: bajo en operaciones concretas, superior en operaciones concretas, bajo en operaciones formales y superior en operaciones formales. Así mismo, para la clasificación en uno de los 4 niveles se proponen 50 ítems que estudian aspectos variados de los niveles de comprensión asociados al álgebra (Rojas, et al., 1999, pp. 37-40):

Nivel 1. Bajo de las operaciones concretas: Los elementos de los ítems son fundamentalmente numéricos (números pequeños) o tienen estructura simple (involucrando una operación) y pueden ser solucionados interpretando la letra como objeto, evaluándola o incluso no usándola. Por ejemplo: Si sabe que $x = 2$, ¿Cuánto es $x + 3$?

Nivel 2. Superior de las operaciones concretas: La diferencia básica de los ítems con los del nivel anterior es que su estructura es más compleja (involucran dos o más operaciones) o requieren el manejo de cantidades más grandes. En cuanto a interpretaciones de la letra, se mantienen en el nivel anterior. Por ejemplo: ¿Qué puede decir acerca de $x + 3 = 5$, si sabe que $x = 2$, cuando $x = 2$?

Nivel 3. Bajo de las operaciones formales: La interpretación de letra mínima requerida para solucionar los ítems es la de incógnita específica. La estructura en estos ítems es relativamente simple y se manejan cantidades pequeñas. Por ejemplo: ¿Qué puede decir acerca de $x + 3 = 5$, si sabe que $x = 2$ y $y = 3$?

Nivel 4. Superior de las operaciones formales: La diferencia con respecto a los ítems del nivel anterior, es que éstos tienen una estructura más compleja. Se incluyen más operaciones y números más grandes. Por ejemplo: Si cuando $x = 2$ y $y = 3$, ¿Qué valores hacen verdadera la expresión $x + 3 = 5$?

Procedimientos

La administración del instrumento se realizó por parte del autor a inicio del curso académico 2015. Tenía un carácter anónimo y fueron complementados por los sujetos la muestra en presencia del profesor. Con anterioridad a la toma de los datos, se obtuvo tanto el consentimiento informado de los estudiantes, de los profesores, así como la aprobación de las autoridades de la Universidad.

Análisis

El análisis de los ítems se realizó mediante un análisis del índice de dificultad y del índice de homogeneidad corregido entre ítem y las puntuaciones totales del cuestionario. Para el análisis de fiabilidad del cuestionario se empleó la Kuder-Richardson. La validez de contenido se efectuó por medio del juicio de experto y la validez del constructo se analizó mediante el análisis factorial de componentes principales utilizando rotación Varimax: previamente se realizaron el test de esfericidad de Bartlett y el test de Kaiser, Meyer y Olkin (KMO), para comprobar la viabilidad del análisis. La comparación entre las medias en las puntuaciones en el cuestionario se examinó a través del análisis de varianza.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estadísticos Descriptivos

En la tabla 2, se presentan los estadísticos descriptivos del cuestionario sobre problemas de transición de aritmética al álgebra para verificar su distribución en la muestra utilizada:

Tabla 2: Estadísticos descriptivos

<i>k</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	\bar{x}	σ	σ^2	<i>k</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	\bar{x}	σ	σ^2	<i>k</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	\bar{x}	σ	σ^2
I1	0.43	0.57	0.43	0.5	0.25	I7d	0.21	0.79	0.21	0.41	0.17	I13g	0.62	0.38	0.62	0.49	0.24
I2	0.82	0.18	0.82	0.39	0.15	I8	0.73	0.27	0.73	0.44	0.2	I13h	0.62	0.38	0.62	0.49	0.24
I3	0.26	0.74	0.26	0.44	0.19	I9a	0.75	0.25	0.75	0.43	0.19	I13i	0.62	0.38	0.62	0.49	0.24
I4a	0.61	0.39	0.61	0.49	0.24	I9b	0.73	0.27	0.73	0.45	0.2	I14	0.31	0.69	0.31	0.47	0.22
I4b	0.73	0.27	0.73	0.44	0.2	I9c	0.3	0.7	0.3	0.46	0.21	I15a	0.74	0.26	0.74	0.44	0.19
I4c	0.59	0.41	0.59	0.49	0.24	I9d	0.16	0.84	0.16	0.37	0.14	I15b	0.64	0.36	0.64	0.48	0.23
I4d	0.62	0.38	0.62	0.49	0.24	I10a	0.58	0.42	0.58	0.49	0.25	I16	0.53	0.47	0.53	0.5	0.25
I4e	0.6	0.4	0.6	0.49	0.24	I10b	0.52	0.48	0.52	0.5	0.25	I17a	0.52	0.48	0.52	0.5	0.25
I4f	0.58	0.42	0.58	0.49	0.24	I11a	0.36	0.64	0.36	0.48	0.23	I17b	0.66	0.34	0.66	0.48	0.23
I5a	0.61	0.39	0.61	0.49	0.24	I11b	0.29	0.71	0.29	0.45	0.21	I18a	0.81	0.19	0.81	0.39	0.15
I5b	0.44	0.56	0.44	0.5	0.25	I12	0.52	0.48	0.52	0.5	0.25	I18b	0.77	0.23	0.77	0.42	0.18
I5c	0.15	0.85	0.15	0.36	0.13	I13a	0.65	0.35	0.65	0.48	0.23	I19a	0.62	0.38	0.62	0.49	0.24
I6a	0.62	0.38	0.62	0.49	0.24	I13b	0.63	0.37	0.63	0.48	0.24	I19b	0.6	0.4	0.6	0.49	0.24
I6b	0.23	0.77	0.23	0.42	0.18	I13c	0.6	0.4	0.6	0.49	0.24	I20	0.63	0.37	0.63	0.48	0.23
I7a	0.59	0.41	0.59	0.49	0.24	I13d	0.61	0.39	0.61	0.49	0.24	I21	0.43	0.57	0.43	0.5	0.25
I7b	0.58	0.42	0.58	0.49	0.24	I13e	0.6	0.4	0.6	0.49	0.24	I22	0.55	0.45	0.55	0.5	0.25
I7c	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	I13f	0.64	0.36	0.64	0.48	0.23						

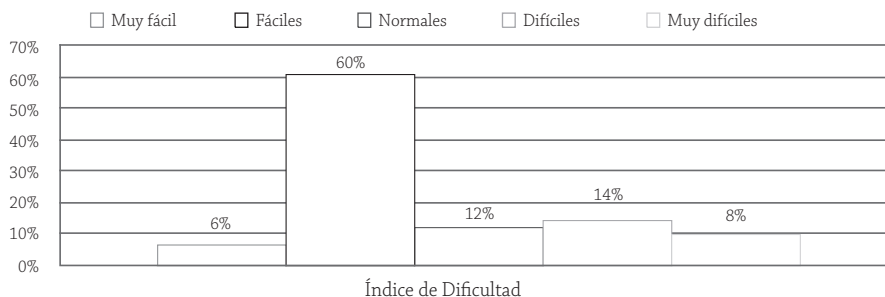
Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar, las puntuaciones media entre los ítems se encuentra en intervalo porcentual 0,15 a 0,82, siendo el ítem I5c el que muestra una menor puntuación y el ítem I2 una mayor puntuación. La desviación estándar entre los ítems tiene una frecuencia desde 0,36 a 0,50, concurriendo el ítem I5c con menor desviación y los ítems I1, I5b, I7c, I10b, I12, I16, I17a, I21, I22 con mayor desviación. Consecuentemente, la varianza alcanzó tendencias entre 0,13 a 0,25, siendo el ítem I5c el

de menor frecuencia y los ítems I1, I5b, I7c, I10b, I12, I16, I17a, I21, I22 con mayor variación.

En este sentido, se calculó el índice de dificultad y se puede observar en la figura 1, que el 66% del total de los ítems está en una tendencia desde muy fáciles a fáciles. Mientras que el 12% del total de los ítems presenta índice de dificultad normal. Sin embargo, un 22% del total de los ítems esta entre difíciles y muy difíciles.

Figura 1. Índice de dificultad.



Fuente: Elaboración propia.

A partir de los resultados obtenidos podemos concluir que el instrumento posee un índice de dificultad fácil. Sin embargo, es necesario realizar un estudio de homogeneidad para confirmar estos hallazgos.

Análisis del índice homogeneidad

Se determinó el índice de discriminación o de homogeneidad del cuestionario Küchemann (1978; 1980; 1981), obteniendo los siguientes resultados:

El 50% de los ítems discriminan muy bien con una tendencia entre 0,40 y 0,62 de índice de discriminación o de homogeneidad.

El 18% de los ítems discriminan bien con una frecuencia entre 0,30 y 0,36 de índice de discriminación.

Así, como un 18% de los ítems que discriminan poco, comprendido entre 0,20 y 0,27 de índice de discriminación.

Mientras que un 8% de los ítems se deben mejorar, dichos ítems están en una tendencia entre 0,14 y 0,18 de índice de discriminación.

Finalmente, un 6% del total de los ítems carecen de utilidad para discriminar y están entre -0,08 y 0,08 de índice de discriminación. Véase la tabla 3.

Tabla 3. Índice de Homogeneidad

<i>k</i>	<i>r_{ix}</i>	<i>S_x</i>	<i>S_i</i>	<i>IH</i>	<i>k</i>	<i>r_{ix}</i>	<i>S_x</i>	<i>S_i</i>	<i>IH</i>	<i>k</i>	<i>r_{ix}</i>	<i>S_x</i>	<i>S_i</i>	<i>IH</i>
I1	0.09	9.72	0.5	0.04	I7d	0.3	9.72	0.41	0.26	I13g	0.62	9.72	0.49	0.59
I2	-0.04	9.72	0.39	-0.08	I8	0.41	9.72	0.44	0.37	I13h	0.63	9.72	0.49	0.60
I3	0.27	9.72	0.44	0.23	I9a	0.44	9.72	0.43	0.40	I13i	0.65	9.72	0.49	0.62
I4a	0.44	9.72	0.49	0.40	I9b	0.34	9.72	0.45	0.30	I14	0.19	9.72	0.47	0.14
I4b	0.45	9.72	0.44	0.41	I9c	0.54	9.72	0.46	0.50	I15a	0.39	9.72	0.44	0.35
I4c	0.5	9.72	0.49	0.46	I9d	0.28	9.72	0.37	0.25	I15b	0.37	9.72	0.48	0.33
I4d	0.5	9.72	0.49	0.46	I10a	0.48	9.72	0.49	0.44	I16	0.48	9.72	0.5	0.44
I4e	0.48	9.72	0.49	0.44	I10b	0.21	9.72	0.5	0.17	I17a	0.38	9.72	0.5	0.34
I4f	0.55	9.72	0.49	0.51	I11a	0.52	9.72	0.48	0.48	I17b	0.31	9.72	0.48	0.27
I5a	0.45	9.72	0.49	0.41	I11b	0.44	9.72	0.45	0.40	I18a	0.24	9.72	0.39	0.20
I5b	0.41	9.72	0.5	0.36	I12	0.47	9.72	0.5	0.43	I18b	0.28	9.72	0.42	0.23
I5c	0.27	9.72	0.36	0.24	I13a	0.64	9.72	0.48	0.61	I19a	0.34	9.72	0.49	0.30
I6a	0.33	9.72	0.49	0.29	I13b	0.64	9.72	0.48	0.60	I19b	0.3	9.72	0.49	0.25
I6b	0.21	9.72	0.42	0.17	I13c	0.62	9.72	0.49	0.59	I20	0.34	9.72	0.48	0.30
I7a	0.51	9.72	0.49	0.47	I13d	0.61	9.72	0.49	0.58	I21	0.13	9.72	0.5	0.08
I7b	0.54	9.72	0.49	0.50	I13e	0.62	9.72	0.49	0.59	I22	0.23	9.72	0.5	0.18
I7c	0.41	9.72	0.5	0.36	I13f	0.65	9.72	0.48	0.62					

Fuente: Elaboración propia.

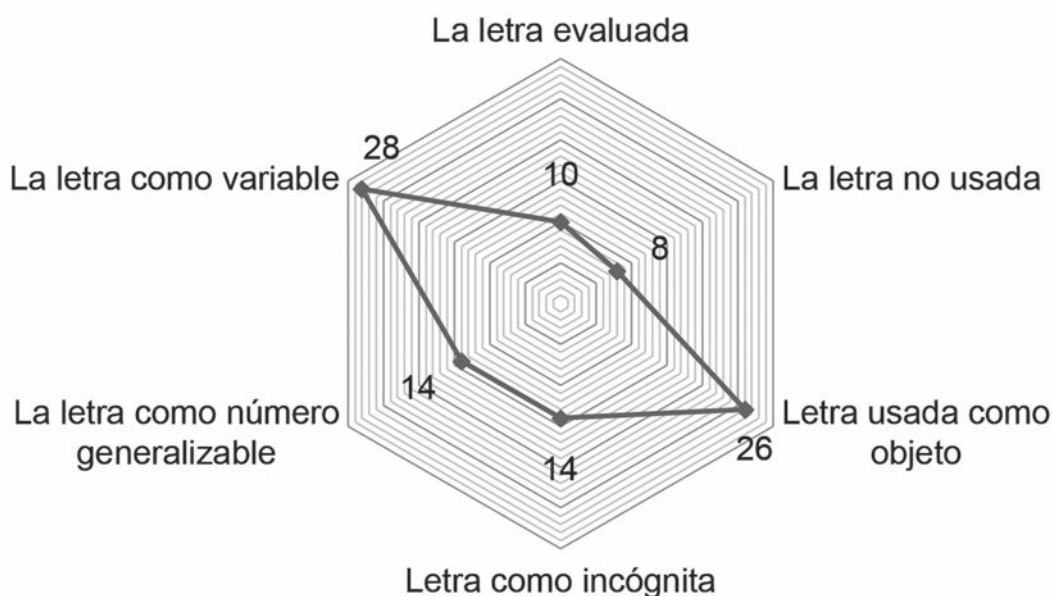
Se puede concluir, que el cuestionario presenta una alta tendencia de discriminación muy bien, por tales razones el cuestionario es eficaz para la evaluación del contenido con estudiantes en contexto de diversidad.

Juicio de experto

En el juicio de experto participaron 10 profesores de matemáticas de la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense. La edad media de experiencia en la profesión docente fue 10 años, con un rango comprendido entre 5 y 20 años de experiencia. El 83% de los participantes fueron hombres y el 17% restante fueron mujeres. El experto define el propósito del instrumento y que el grupo elegido de expertos ha de representar una diversidad relevante de capacidades y puntos de vista (Batanero & Díaz, 2003). En nuestro caso,

fueron seleccionados en función a su conocimiento experto de problemas de transición de aritmética al álgebra, con relación a las siguientes categorías de contenido: letra evaluada, letra no usada, letra usada como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizable, letra como variable. El juicio de experto fue establecer un consenso sobre las especificaciones del instrumento, decidiendo qué especificaciones del contenido eran relevantes para los propósitos del instrumento (Batanero & Díaz, 2003). También, el juicio de experto consistió en establecer un consenso de opiniones de los expertos sobre cómo cada ítem particular se ajusta bien para evaluar el contenido específico para el cual ha sido diseñado y que sirviese como base para elegir los ítems definitivos. En la figura 2, se presenta la distribución de los ítems que realizaron los profesores, según los contenidos temáticos.

Figura 2. Distribución de los ítems por las categorías de los contenidos en el instrumento.

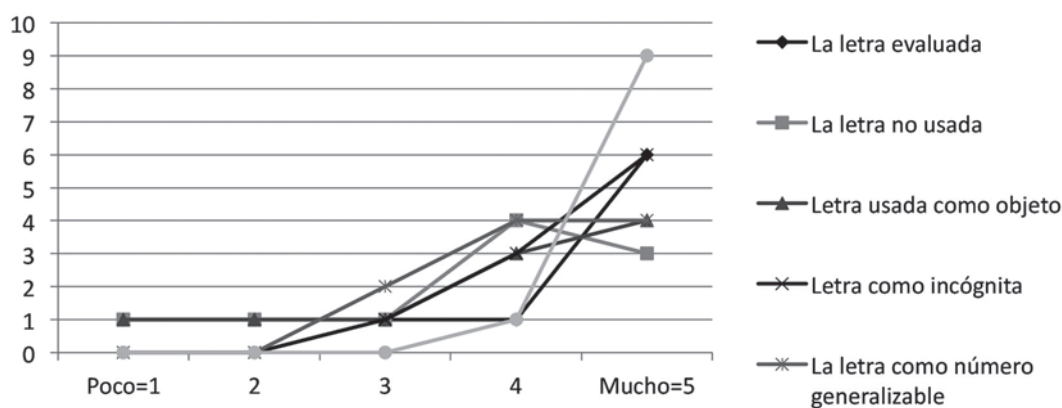


Fuente: Elaboración propia

La figura anterior, describe la opinión de los profesores sobre cómo cada ítem se distribuye con las categorías de interpretación y comprensión del uso de la letra en contextos algebraicos: los resultados ponen de manifiesto que la categoría de “La letra como variable” representa el 28% del total de los ítems, mientras que un 26% del total de los ítems tienden a estar en la categoría “La letra usada como objeto”, en cambio la categoría “La letra evaluada” representa el 10% total de los ítems y “La letra no usada” constituye el 8% total de los ítems, pero se puede observar que las categorías

“La letra como número generalizable” y Letra como incógnita cada una representa el 14% del total de los ítems es decir, que su suma representa el 28% del total de los ítems. A partir de estos resultados, se les proporcionó a los expertos la pregunta: “Los ítems son adecuados para estos contenidos”, en este sentido, se les pedía, para cada categoría de contenido y para cada uno de los ítems asociados a la misma su grado de acuerdo (en una escala para 1= Poco y para 5= Mucho) sobre su adecuación a los fines de nuestra evaluación.

Figura 3. Opinión de los profesores con respecto a las categorías de contenido



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 3, se visualiza la respuesta sobre la pregunta “si los ítems son adecuadas para estos contenidos” la cual podemos observar que un alto porcentaje de los participantes opinan que los ítems presentan la información adecuada con respecto a las categorías de contenidos.

Análisis de la fiabilidad

Entre los diversos procedimientos para el cálculo del estimador del coeficiente de fiabilidad se ha utilizado el coeficiente de Kuder-Richardson para ítems dicotómicos. Este coeficiente comprueba la consistencia interna de las mediaciones con opciones dicotómicas, véase la tabla 4:

Tabla 4. Análisis de la fiabilidad.

Niveles	k	$\sum p \cdot q$	σ^2	α
Nivel 1	9	2,07	7,02	0,88
Nivel 2	13	2,85	8,98	0,74
Nivel 3	14	3,01	8,74	0,70
Nivel 4	14	3,09	9,63	0,72
Puntuación Total	50	11,02	99,5	0,90

Fuente: Elaboración propia.

Se observa, en la tabla 10, que la consistencia interna es buena para los niveles de comprensión del álgebra y puntuación total. La consistencia interna indica que el cuestionario es confiable para evaluar los problemas de transición de aritmética al

álgebra. Sin embargo, los valores en los niveles de comprensión son moderados, como corresponde a un constructo no unidimensional, pero entran en los límites sugeridos por diversos autores como Santisteban (1990) y Batanero y Díaz (2003) quienes indican, como límite general, 0,50.

Análisis factorial

Se ha aplicado la técnica multivariante del análisis factorial, para reducir estandarizar y validar la

información recogida en el cuestionario aplicado a los estudiantes de las áreas de Ciencias Administrativa e Informáticas. El análisis factorial se ha llevado a cabo según el método de componentes principales (PrC) con fines confirmatorios. Por otro lado, la determinación de la cantidad de niveles se ha realizado según el criterio de raíz latente de Kaiser-Meyer-Olkin. Y posteriormente, se ha aplicado la rotación Varimax (máxima varianza) con normalización de Kaiser. A continuación se presentan los resultados.

Tabla 5. Resumen estadístico del análisis factorial

Medida de Adecuación Muestral	Kaiser-Meyer-Olkin	0,854
Prueba de Esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	9134,741
	Gl	1225
	Sig.	0,000
Varianza Explicada Total	%	70,652
Fiabilidad	Kuder-Richardson	0,90
Cantidad de Niveles		4
Cantidad de ítems		50

Fuente: Elaboración Propia.

En la tabla 6, se resumen los estadísticos de la solución factorial definitiva, después de la rotación, se puede observar que la solución definitiva del análisis factorial contiene 4 niveles con 50 de los ítems originalmente utilizados, los cuales explican un porcentaje de la varianza muy aceptable de un 70,652%. La prueba de esfericidad de Bartlett nos confirma sin duda la existencia de factores subyacentes en la matriz de datos, debido al alto nivel de significación obtenido (Tabla 5).

Tabla 6. Factorial definitiva.

Niveles	σ^2	α	k
Nivel 1	22,858%	0,88	9
Nivel 2	14,746%	0,74	13
Nivel 3	15,315%	0,70	14
Nivel 4	17,733%	0,72	14

Fuente: Elaboración Propia.

Como puede observarse en la tabla 6, que el Nivel 1, es el que más explica, sólo en él se alcanza el 22,858% de la varianza explicada, sin embargo, los

otros tres niveles también explican un porcentaje nada despreciable de un 47,794% entre los tres. La estructura factorial hallada coincide absolutamente con la planteada teóricamente, emergiendo cuatro niveles coincidentes con los cuatro niveles de comprensión del álgebra planteado en el modelo de Küchemann. La dimensiones teóricas establecidas se basan en la configuración del proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra, tal como se ha definido por Küchemann. Este proceso está compuesto por un ciclo de cuatro niveles: Nivel bajo en operaciones concretas (definido factorialmente en el Nivel 1), Nivel superior de las operaciones concretas (que constituye el Nivel 2), Nivel bajo de las operaciones formales (que está definido en el Nivel 3) y finalmente, Nivel superior de las operaciones formales (que constituye el Nivel 4).

Nivel 1: Nivel bajo en operaciones concretas. Este factor explicar el 22,858% de la varianza total y está configurado por nueve ítems. Los pesos factoriales van desde 0,811 hasta el que menos satura 0,399. En este nivel, en primer lugar, se

Tabla 7. Descripción de los niveles.

k	N1	N2	N3	N4	k	N1	N2	N3	N4	k	N1	N2	N3	N4	k	N1	N2	N3	N4
I5a	0.47	-0.20	0.31	0.11	I1	-0.13	0.19	0.07	0.02	I2	0.02	-0.19	0.07	-0.19	I3	0.08	0.03	0.16	0.26
I5b	0.47	0.05	0.21	-0.13	I4a	0.14	0.73	-0.28	-0.02	I4c	0.16	-0.19	0.73	0.02	I4e	0.14	-0.08	0.06	0.66
I6a	0.40	0.00	0.09	0.01	I4b	0.06	0.62	0.11	-0.07	I4d	0.12	-0.03	0.68	0.06	I7d	0.00	0.24	-0.17	0.54
I7a	0.50	0.08	0.27	0.06	I6b	-0.06	0.59	0.06	-0.07	I4f	0.17	-0.09	0.73	0.07	I10a	0.08	0.02	0.31	0.50
I7b	0.54	0.04	0.29	0.07	I7c	0.19	0.33	0.27	-0.03	I5c	-0.05	0.16	0.53	-0.03	I10b	-0.11	-0.01	0.18	0.37
I8	0.52	-0.36	0.21	0.25	I9b	0.24	0.40	-0.53	0.38	I9d	-0.02	0.21	0.35	0.09	I13e	0.06	-0.11	0.24	0.88
I9a	0.46	0.28	-0.45	0.42	I9c	0.25	0.47	0.30	-0.01	I13b	0.24	-0.03	0.87	0.01	I13f	0.03	-0.02	0.22	0.91
I12	0.40	0.14	0.07	0.32	I11a	0.09	0.50	0.25	0.20	I13c	0.25	-0.10	0.86	0.05	I17a	0.11	0.49	-0.07	0.52
I13a	0.81	-0.02	0.27	0.05	I11b	-0.02	0.42	0.36	0.19	I13h	0.22	-0.06	0.89	0.05	I17b	0.03	0.43	-0.16	0.65
					I13d	-0.08	0.87	0.22	0.05	I14	0.00	-0.09	0.59	0.04	I18a	-0.12	0.43	-0.05	0.52
					I13g	-0.09	0.89	0.22	0.05	I15b	0.13	0.15	0.57	0.04	I18b	-0.03	0.48	-0.09	0.48
					I13i	-0.05	0.89	0.26	0.03	I16	0.25	0.05	0.50	0.34	I20	-0.02	0.32	-0.06	0.74
					I15a	0.12	0.59	0.04	0.18	I19a	-0.04	-0.02	0.76	0.27	I21	-0.17	0.08	-0.19	0.80
										I19b	-0.08	-0.05	0.77	0.24	I22	-0.13	0.07	-0.02	0.75

Fuente: Elaboración propia.

trata de valorar a la letra evaluada, es decir, al proceso de asignársele un valor numérico a la letra desde el primero momento, y en segundo lugar, se evalúa la letra no usada o ignorada, o sea, al proceso de reconocer la existencia de la letra, pero sin darle un significado, ni operar con ella.

Nivel 2: Nivel superior de las operaciones concretas.

Este factor explica el 14,746% de la varianza total y está configurado por trece ítems. Los pesos factoriales van desde 0,894 hasta el que menos satura 0,188. En este nivel, los ítems que saturan hacen a referencia a la letra usada como objeto, es decir, se configuran con ítems, donde hacen referente a la letra establecer la condición de ver la letra como abreviatura de un objeto o como un objeto por si misma.

Nivel 3: Nivel bajo de las operaciones formales. Este

factor explica el 15,315% de la varianza total y está configurado por catorce ítems. Los pesos factoriales van desde 0,865 hasta el que menos satura 0,072. En este nivel, los 14 ítems hacen referencia a la letra como incógnita y la letra como numero generalizado, es decir, por una parte, existen algunos ítems que conducen a ver la letra con un número específico, concreto, aunque desconocido, y por otra parte, hay ítems que tratan de evaluar que la letra puede

tomar varios valores, más que uno sólo pero sin llegar a considerarla una variable.

Nivel 4: Nivel superior de las operaciones formales.

Este factor explica 17,733% de la varianza total y está configurado por catorce ítems. Los pesos factoriales van desde 0,908 hasta el que menos satura 0,264. Los ítems que configuran este nivel describen la letra como variable, es decir, la letra es vista como representando un rango de valores inespecíficas, y a la vez se contempla la existen de una sistemática relación entre dos conjunto de valores.

Análisis de las medias en las puntuaciones por nivel

Con el fin de determinar el efecto sobre la puntuación de cada nivel en el cuestionario de las especialidades en que fue aplicado, se ha realizado un análisis de la varianza para determinar qué especialidad tienen un efecto estadísticamente significativo sobre las puntuaciones en los niveles (variable dependiente puntuaciones en los niveles). La tabla 8, muestra la media de las puntuaciones en los niveles del cuestionario. También muestra los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de la variabilidad en su muestreo. Las dos columnas de la derecha muestran intervalos de confianza del 95% para cada una de las medias.

Tabla 8. Medias por mínimos cuadrados con un intervalo de confianza del 95%.

Niveles	Participantes	Casos	Media	Error Estándar	Límite Inferior	Límite Superior
1	Administración	113	5,6460	0,23948	5,1715	6,1205
	Contabilidad	52	6,7885	0,23356	6,3196	7,2574
	Informática	93	4,5376	0,29826	3,9453	5,1300
2	Administración	113	6,9292	0,27790	6,3786	7,4798
	Contabilidad	52	8,1538	0,27100	7,6098	8,6979
	Informática	93	5,8387	0,33367	5,1760	6,5014
3	Administración	113	7,4602	0,24506	6,9746	7,9457
	Contabilidad	52	8,8654	0,33413	8,1745	9,5562
	Informática	93	6,6774	0,34397	5,9943	7,3606
4	Administración	113	7,4248	0,29530	6,8397	8,0099
	Contabilidad	52	8,4038	0,35833	7,6845	9,1232
	Informática	93	7,8495	0,34117	7,1719	8,5271

Fuente: Elaboración propia

Para verificar estos hallazgos, se realizó un análisis de varianza de los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento por el grupo de estudiantes universitarios participantes.

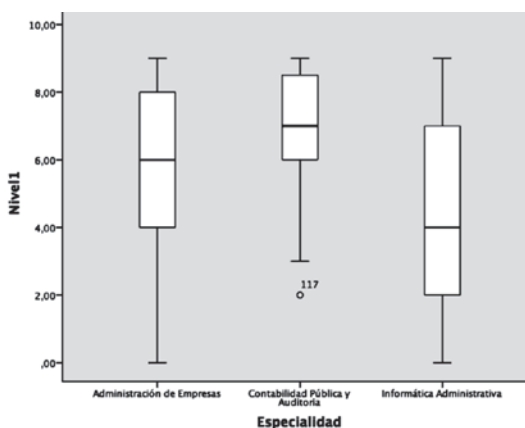
Tabla 9. Análisis de varianza de la comparación entre puntuaciones.

Componentes	\bar{x}	σ	σ^2	gl	χ_{RMS}	F	Sig.
Nivel 1	5,4767	2,65116	7,029	2	6,399	13,654	0,000
Nivel 2	6,7829	2,99666	8,980	2	8,332	10,985	0,000
Nivel 3	7,4612	2,95630	8,740	2	8,182	9,757	0,000
Nivel 4	7,7752	3,10326	9,630	2	9,569	1,826	0,163

Fuente: Elaboración propia.

La comparación entre medias en las puntuaciones en el cuestionario muestra que la puntuación global del cuestionario, así como las puntuaciones de los niveles de comprensión del álgebra, podemos observar que el nivel 1, experimenta un descenso en relación a las puntuaciones de los otros niveles. En cambio los niveles 3 y 4 presentan un aumento en el cuestionario con respecto a los otros. El resultado del análisis de varianza muestra que las diferencias significativas entre las puntuaciones en los niveles fueron estadísticamente significativos. Lo anterior permitió, realizar un análisis de los niveles por especialidad. Se encontró que los estudiantes de Contabilidad Pública y Auditoría alcanzaron buenas puntuaciones en el nivel 1, es decir, que manifiestan un buen nivel de comprensión del álgebra, sin embargo, el resto de las especialidades también obtuvieron puntuaciones encima de la media, esto comprueba las diferencias significativas entre las especialidades, véase la figura 4.

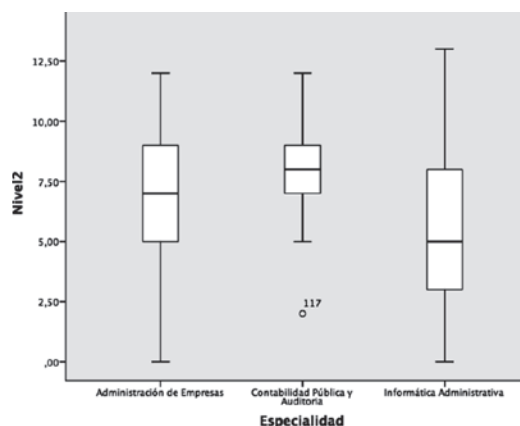
Figura 4. Nivel 1 de comprensión del álgebra.



Fuente: Elaboración propia.

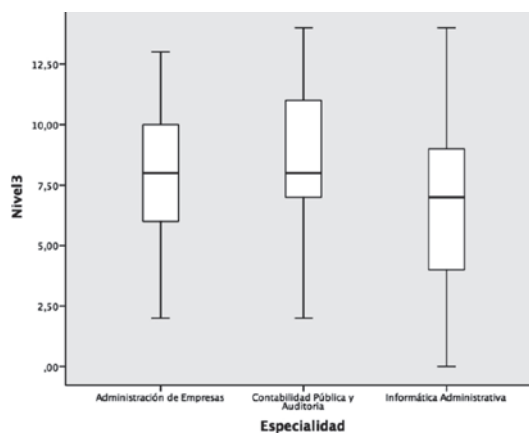
En el Nivel 2, los estudiantes de Contabilidad Pública y Auditoría muestran mejor puntuación en el nivel. También se puede observar que existen diferencias entre las especialidades, pero que las especialidades tienen una tendencia positiva en el nivel. Véase la figura 5.

Figura 5. Nivel 2 de comprensión del álgebra.



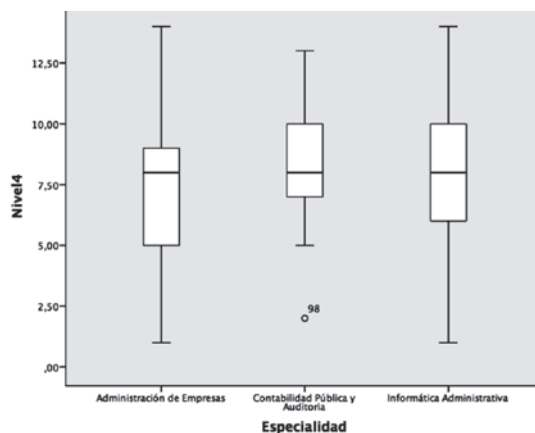
Fuente: Elaboración propia.

También, se obtuvieron las tendencias de las especialidades hacia el Nivel 3 y se encontró que los estudiantes de Contabilidad Pública y Auditoría mantienen buenas puntuaciones en este nivel con respecto a las otras especialidades, véase en la figura 6.

Figura 6. Nivel 3 de comprensión del álgebra.

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se relacionó la variable especialidad con el Nivel 4, y se encontró que los estudiantes de Contabilidad Pública y Auditoría presentan la mayor puntuación hacia el nivel, con respecto a las otras especialidades, véase en la figura 7.

Figura 7. Nivel 4 de comprensión del álgebra

Fuente: Elaboración propia.

Las figuras anteriores (figura 4, 5, 6, 7), permiten ver las medias e intervalos de confianza en la puntuación por nivel para el factor especialidad donde se confirman la existencia de diferencias significativas entre las especialidades. En resumen, la especialidad de Contabilidad Pública y Auditoría parece tener más capacidad de comprensión del álgebra que las otras especialidades.

CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones en dos bloques, el primer bloque son los hallazgos encontrados en el proceso de adaptación y validación del cuestionario y el segundo bloque el análisis de las puntuaciones medias así como del cuestionario.

Bloque 1: Adaptación y validación del cuestionario:

Los resultados del índice de dificultad oscilan entre muy fácil y muy difícil ya que la proporción de estudiantes universitarios que resolvieron el instrumento obtuvieron puntuaciones entre 0,15 a 0,82.

El análisis del grado de discriminación obtiene que el 68% del total de los ítems están en un rango comprendido entre muy bien y bien. Exista un 18% del total de los ítems que discriminan poco, así como un 8% que se deben mejorar y un 6% que carecen de utilidad.

En el juicio de experto se encontró que un alto porcentaje de los participantes opinan que los ítems presentan la información adecuada con respecto a las categorías de contenidos que el cuestionario trata de evaluar.

El análisis de fiabilidad que fue sometido el instrumento se expresa en haber calculado el coeficiente alfa con Kuder-Richardson para ítems dicotómicos, proporcionando una fiabilidad del cuestionario por un 0,90. Y en los niveles de comprensión del álgebra una tendencia de fiabilidad entre 0,70 y 0,88. Por lo que se concluye que el instrumento es confiable.

La aproximación de la validez de contenido se centró en analizar la correspondencia entre los ítems y el contenido a evaluar, es decir, el instrumento recoge una muestra representativa de los contenidos que se pretende evaluar.

El resultado de validación, adecuación, reducción y estandarización del cuestionario se realizó mediante el análisis factorial de componentes

principales con fines confirmatorios; se hizo primeramente el test de adecuación muestral Kaiser-Meyer-Olkin y la prueba de esfericidad para determinar la posibilidad de realizar el análisis factorial. Encontrando estos datos dieron las pautas para realizar el análisis factorial de componentes principales con rotación Varimax donde se obtuvieron 4 niveles que explican, conjuntamente, el 70,652% de la varianza total. Por tanto, se confirma que el cuestionario se adapta al contexto de la investigación.

Bloque 2: Análisis de las puntuaciones medias en el cuestionario:

La comparación entre las medias en los niveles de comprensión del álgebra dio como resultado que existe diferencia entre las medias. Donde el nivel 1, obtuvo una puntuación de 5,4767, este nivel experimenta un descenso en relación a los puntuaciones de los otros niveles. En cambio, el nivel dos incrementa a 6,7829 con respecto al nivel 1. Sin embargo, los niveles 3 y 4 presentan una puntuación entre 7,4612 y 7,7752, es decir, un aumento en las puntuaciones con respecto a los otros niveles. Esto resultados dieron las pautas para un análisis de varianza.

El resultado del análisis de varianza muestra que las diferencias significativas entre las puntuaciones en los niveles fueron estadísticamente significativas; en este contexto sobresalen los estudiantes de contabilidad pública y auditoría con mejores puntuaciones en los niveles de comprensión del álgebra.

En general, estandarizar un cuestionario que evalúa los niveles de comprensión del álgebra es una tarea de mucha importancia que permite visualizar los problemas del álgebra, como parte de un engranaje global frente al cual se puede aplicar en contextos diversos de interpretación de la letra. Por tanto, los resultados encontrados, referente a la interpretación de la letra por parte de los estudiantes, permitirán realizar diseños didácticos para poder ayudar a los estudiantes, con el fin de que éstos

no tengan problemas en las futuras asignaturas de matemáticas en la Universidad.

REFERENCIAS

- Azarquiel, Grupo. (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., y Díaz, C. (2006). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. *Revista de Educación Matemática*. 8 (2), 197-223.
- Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. In H. Chick, and J. Vicent, (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. II, 129-136. Australia. Melbourne: Design and Print Centre, University of Melbourne.
- Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 21(3), 247-304.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4(2), 165-198.
- Cajaraville, J., Cachafeiro, L., Fernández, T., Ferro, & Salinas, M. (2012). *Problemática Didáctica del estudio del álgebra en educación secundaria*. Santiago de Compostela: Imprenta Universitaria.
- Chevallard, G., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: ICE-Horsis.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.
- Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, 5, pp. 23-34.
- Furinghetti, F. & Paula, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a Little difference? In J. Da Ponte, and J. Matos, (Eds.). Proceedings of the

- 18th International Conference of the Psychology of Mathematics Education. Vol. II, pp. 368-375. Portugal: Universidad de Lisboa.
- Gil, R. (2011). *El fracaso del ingreso a la Universidad, un problema nacional*. IDE-UCA: El Nuevo Diario. <http://www.elnuevodiario.com.ni/opinion/92343>.
- Godino, J. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29, pp. 9-19.
- Godino, J. & Font, V. (2004). Razonamiento algebraico para maestros. En J. Godino, (Eds.). *Matemática y su didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros (771-826)*. (<http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros>).
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*. Vol. 39 (1-2), pp. 127-135.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill.
- Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier, (Eds.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (27-32)*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, and T. Romberg, (Eds.). *Mathematics Classrooms that Promote Understanding (135-155)*. Mahwa, NJ: Laurence Erbaum Associates Inc. Publishers.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran, C & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*. 7(3), 58-81.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws, (Eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (390-419)*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of algebra and function. In T. Nunes, and P. Bryant, (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective (133-157)*. East Sussex UK: Psychology Press.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez, and P. Boera, (Eds.). *Handbook on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future (11-49)*. UK: Sense Publishers.
- Küchemann, D. (1980). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*. 7(4), 23-26.
- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. National Council of Teacher of Mathematics. Electronica: <http://standards.nctm.org>.
- Palarea M., & Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*, 16, 91-98.
- Pizón M., & Gallardo, A. (2000). Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales. *Educación Matemática*. 12(2), 81-96.
- Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., & Mora, L. (1999). *La transición del aritmética al álgebra*. Grupo Pretexto. Bogotá: Gaia-Universidad Distrital.
- Socas, M. (1997). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela de Secundaria. En L. Rico et al (Eds.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154)*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Schoenfeld, A & Arcavi, A. (1999). On the meaning of variable. In B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking Grade K-12 (pp. 150-156)*. Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Trigueros M., & Ursini, S. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Revista Matemática Educativa*. 18(3), 5-38.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Mexico: CINVESTAV-IPN.
- Usiskin, Z. (1999). Conception of School Algebra and uses of variables. In B. Moses (Ed.). *Algebra Thinking Grade K-12 (pp. 7-13)*. Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Vicario, M. (2002). Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior. Tesis de Grado. México: FM-UA (No publica).