ABORDAJE BASADO EN COMPETENCIAS: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS EN EL NIVEL BÁSICO[1]

Cristianne Butto Zarzar[2] y Claudia Martínez Montes[3]
Universidad Pedagógica Nacional Ajusco-México

Fecha de recepción: Octubre 1, 2012
Fecha de aceptación: Noviembre 5, 2012

RESUMEN

Se estudia la resolución de problemas aditivos y las representaciones infantiles. Objetivos: 1) Investigar la resolución de problemas aditivos que hacen los niños y las competencias matemáticas que desarrollan. 2) Verificar la viabilidad de una secuencia didáctica que integre tipos y sub-tipos de problemas aditivos. Marco teórico: teoría de campos conceptuales de Vergnaud y representaciones externas de Goldin). Metodología: de tipo explicativo. Participantes: diez estudiantes de 2° grado de primaria de una escuela pública de la ciudad de México. Etapas del estudio: 1. Cuestionarios iniciales de escritura numérica y resolución de problemas aditivos, seguidos de entrevistas clínicas individuales 2. Secuencia didáctica de problemas aditivos. 3. Cuestionario final. Resultados: se observó que los estudiantes elaboran reglas intuitivas sobre el sistema de numeración decimal y utilizan diversas estrategias de resolución de problemas y soportes de representación como una etapa de transición a las reglas formales.
Palabras clave: Problemas aditivos, resolución de problemas, educación básica, competencias matemáticas.

COMPETENCES BASED APPROACH: ADDITIVES PROBLEM SOLVING AT THE BASIC LEVEL

ABSTRACT

The processes of solving additive problems and the child representations are studied. Objective: 1) Investigate additive problem solving in children and the mathematical competences developed throughout. 2) Verify the feasibility of a didactical sequence integrating types and sub-types of additive problems. Theoretical framework: Vergnaud's conceptual field, Goldin's external representations. Methodology: explictive. Participants: ten students of the 1st and 2nd grade of a public school in México City. Stages of study: 1. initial questionnaire of numeric writing and additive problem solving, followed by individual clinical interviews. 2. Didactical sequence of additive problems. 3. Final questionnaire. Results: It was observed that students elaborated intuitive rules on the decimal number system and that they used diverse strategies of problem solving and representation supports, as a transition stage towards formal rules.
Key words: additive problems, problem solving, basic education, mathematical competences.

1 Investigación Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria, mediante las becas para estudiantes de maestría en Desarrollo Educativo, Línea Educación Matemática UPN-Ajusco.

2 Profesora e investigadora T/ C, Titular B de la Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco, México; cristianne_butto@hotmail.com.

3 Egresada de la Maestría en Desarrollo Educativo, línea Educación Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco, México; claumartinezmontes@hotmail.com Proyecto de tesis financiado por el CONACYT, número de becaria 379652.

INTRODUCCIÓN

En los inicios de la primera década del siglo XXI, en México aún existían indicios de que los estudiantes, especialmente los de las zonas marginadas, tenían escaso desarrollo de competencias básicas en lectura, escritura y matemáticas. Resultados del *Primer estudio comparativo en lenguaje, y matemáticas, en tercer y cuarto grado de primaria en 13 países de América latina y el Caribe* (LLECE – UNESCO, 2000) mostraron que los niños mexicanos tenían desempeños cercanos a la media en matemáticas, mientras que los resultados de una evaluación de estudiantes de 15 años de edad en 25 países del Proyecto Internacional para la

Producción de Indicadores de Rendimiento de los Alumnos (PISA), indicaron que en 2000 alrededor del 1% de estudiantes mexicanos, y en 2003 el 9% completaban tareas que exigen niveles de comprensión y ejecución más complejos en habilidades matemáticas y científicas (OCDE, 2002; OECD, 2003; Reimers, 2003).

En lo que refiere específicamente al *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo* (SERCE) desarrollado en América Latina y El Caribe. Los niveles que se manejaron en esta prueba fueron cuatro; de acuerdo al SERCE, (2008), en tercer grado las habilidades que tienen los niños de acuerdo al nivel son las siguientes:

Nivel I, se encuentran los niños con menores habilidades; por ejemplo: los alumnos reconocen la relación de orden entre números.

Nivel II, se encuentran los estudiantes que reconocen la organización decimal y posicional del sistema de numeración. También resuelven problemas en el campo aditivo.

Nivel III, los niños resuelven problemas que incluyen una ecuación aditiva o que requieren dos operaciones. Resuelven problemas en el campo aditivo con unidades de medida. También reconocen la regla de formación de una secuencia gráfica o numérica aditiva para poder continuarla.

Nivel IV, se ubican los niños con mayor desarrollo de habilidades, independientemente de tener los conocimientos de los niveles previos, reconocen la regla de formación de una secuencia numérica e identifican su enunciado.

Los estudiantes de 3° grado de Educación Primaria en México se ubicaron con puntuaciones medias superiores, en los Niveles III y IV. Los indicadores de los resultados muestran diferencias significativas entre una y otra prueba; en los resultados de SERCE se presentan resultados más alentadores que en la prueba PISA, pero aún así las dificultades permanecen en el Sistema Educativo Mexicano.

A pesar de estos resultados, el panorama nacional no ha cambiado mucho; en las dos últimas décadas, los mayores avances en materia de educación básica han sido las Reformas Educativas que se iniciaron en 2006 y concluyeron en 2011 con la Reforma Institucional de Educación Básica (RIEB 2011), la renovación periódica de los planes y programas de estudio y la distribución masiva de diversos materiales educativos y libros de texto gratuitos.

En lo que refiere específicamente a la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) en 2009, llevada a cabo por la Secretaria de Educación Pública (SEP-México), propone la articulación de la educación preescolar, primaria y secundaria; y la organización de un Plan de Estudios basado en un modelo educativo por competencias. En *el Plan y Programa de Estudios 2011,* los contenidos matemáticos se organizan en tres ejes temáticos: *Sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida, y manejo de la información.* En el eje temático: *Sentido numérico y pensamiento algebraico.* Al término del segundo periodo (tercero de primaria), uno de los objetivos en la asignatura de matemáticas es que los estudiantes puedan resolver problemas aditivos con diferente estructura, y utilicen los algoritmos convencionales. En segundo grado de primaria los niños estarían en un proceso de adquisición de conocimientos que los lleven al logro del objetivo para el segundo período. En el proceso de aprendizaje, los estudiantes presentan dificultades para resolver problemas de estructura aditiva y realizar una sustracción, con acciones que involucran, por ejemplo, pedir prestado o llevar. Lerner (1997), señala que la única explicación que podemos encontrar para estos hechos es que no se ha brindado a los niños la posibilidad de comprender procedimientos, tales como *llevar y pedir prestado. En la práctica docente, estos procedimientos están* estrechamente asociados a las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo. Otra de las dificultades que los niños presentan, es la parte conceptual de los problemas; no los comprenden y la respuesta que dan no corresponde a la solución.

ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA Y SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL INDO-ARÁBIGO

El campo conceptual de las estructuras aditivas se ha estudiado desde la década de los 80; se conocen aportes tanto a su delimitación teórica como a las estrategias y dificultades de los estudiantes al resolver problemas de estructura aditiva. Varios autores han investigado este tema. Vergnaud y Durand (1983), *Estructuras aditivas y complejidad psicogenética;* Vergnaud (1991), *Los problemas de tipo aditivo;* Puig y Cerdán (1989), *Problemas aritméticos escolares;* Castro, Rico y Castro (1996), *Estructuras Aritméticas Elementales;* Aguilar y Navarro (2000), *Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños;* y Flores (2005), *El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas,* entre otros.

De acuerdo a Vergnaud (1991 citado en Butto y Delgado 2012) los problemas de estructura aditiva son todos aquellos para cuya resolución intervienen sumas o restas y no pueden estudiarse en forma separada, pues pertenecen a una misma familia de problemas o a un mismo campo conceptual. Involucran la construcción de conocimientos matemáticos que van más allá de lso algoritmos de la suma y de la resta, como son el dominio de diversas estrategias de cálculo y el reconocimiento de los problemas que se resuelven con esas operaciones. En lo que refiere específicamente a los tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva Vergnaud (2010) distingue seis categorías: *1)* Dos medidas se componen para dar lugar a una medida, ejemplo: Lalo tiene 7 dulces de fresa y 5 de piña. ¿Cuántos dulces tiene en total? *2)* Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida, ejemplo: Pedro tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Ganó 8 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora? *3)* Una relación une dos medidas, ejemplo: Pedro tiene 17 canicas. Axel tiene 6 menos. ¿Cuántas canicas tiene Axel? *4)* Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación, ejemplo: Raúl ganó 6 canicas ayer y hoy perdió 9. ¿Cuántas canicas perdió en total? *5)* Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo, ejemplo: Luis le debía 20 pesos a Raúl. Le devuelve 8. ¿Cuánto le debe ahora? Y *6)* Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo, ejemplo: Aldo le debe 19 pesos a Joel, pero Joel le debe 8; entonces ¿cuántas canicas le debe Aldo a Joel? Maza (1999) los organiza en cuatro tipos: combinación, cambio, comparación e igualación y comenta acerca de la dificultad que los niños enfrentan con estos problemas. Una de esas dificultades refiere a la complejidad conceptual (inicio desconocido, final desconocido, cambio o diferencia desconocida), la magnitud de las cantidades, los soportes de representación, estructura sintáctica, y los diversos modelos matemáticos que son poco explorados en la instrucción escolar.

Otro de los aspectos importantes a considerar en la resolución de problemas aditivos, refiere a los modelos matemáticos explorados en el salón de clase. De acuerdo con Saaty y Joyce (1981), un modelo matemático es una forma de expresar proposiciones sustantivas de hechos o de contenidos simbólicos en la cual se indican variables, parámetros y/u operaciones; y este se utiliza para dar un sentido apropiado a la realidad que nos presenta el problema. Castro, Rico y Castro (1996), señalan que los modelos matemáticos son: lineal, cardinal, de medida, numérico y funcional. Este último modelo, el funcional es el que presenta mayor dificultad en la resolución de problemas aditivos, a pesar de que éste es integrado en los libros de texto gratuito.

Por otro lado, es importante mencionar que en el proceso de resolución de problemas aditivos, los niños deben asociar las reglas del sistema de numeración decimal, mismas que los estudiantes deben comprender cuando se enfrentan a la resolución de dichos problemas, específicamente en lo que refiere al dominio del algoritmo.

En este sentido, varios autores han investigado el sistema de numeración decimal indo-arábigo (SND), Guitel, 1975; Ifrah, 1987), citadas por Terigi y Wolman (2007): consideran tres innovaciones importantes:

1) Utilización de agrupamientos: la idea de agrupar las cantidades;
2) Utilización del principio de la base;
3) Valor posicional de las cifras.

La primera idea constituyó un primer paso en la economía de la representación. La segunda idea convirtió los agrupamientos en regulares. Este principio permitió superar la dificultad de tener que recordar, para comprender cada nivel de agrupamiento y la tercera idea fue el principio fundamental para la economía en la notación numérica; y permitió eliminar en la escritura, la representación de los exponentes de las potencias de la base, por ejemplo, cuando, escribimos 1346, es como si dijéramos: $(1 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$. En lo cotidiano no hacemos este tipo de cálculos cada vez que encontramos una cifra; estamos acostumbrados a concebir las cantidades de acuerdo con el SND.

Por otro lado, los estudios de Lerner y Sadovsky (2010), con niños entre cinco y ocho años de edad; mostraron que los niños elaboran hipótesis sobre el sistema de numeración decimal indo-arábico, por ejemplo, las que a continuación se describen.

1.- *Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número.* Por ejemplo, cuando se les preguntaba a los niños ¿cuál número es más grande el 33 o el 5? Aunque los estudiantes no conocían la denominación de los números contestaban que el 33 era más grande porque tenía dos números y el 5 más pequeño porque sólo tenía un número.

2.- *El primero es el que manda,* el valor de una cifra depende del lugar en el que este ubicada con respecto a las otras que constituyen el número. Cuando hay dos cantidades que inician con la misma cifra, hay que observar la segunda para definir cuál es mayor.

3.- La apropiación de la escritura convencional de los números no sigue el orden de la serie numérica: *los niños manejan en primer lugar los nudos es decir las decenas, centenas, unidades de mil…, exactas y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos.*

4.- La escritura surge de la numeración hablada, *los niños escriben los números tal cual los escuchan.* Por ejemplo para escribir el número 109, los niños escriben 1009.

Estas hipótesis son aproximaciones que hacen los niños acerca del SND, y van desde las reglas intuitivas que ellos elaboran hasta la adquisición de las reglas formales del sistema. En ocasiones estas hipótesis son poco consideradas en la instrucción escolar, en otras ocasiones, se les considera erróneas.

A partir de las investigaciones descritas anteriormente, es importante hacer referencia al funcionamiento cognitivo y al establecimiento de representaciones mentales que refiere Vergnaud (1987) y que de acuerdo a Da Rocha Falcão (2003) esto conduce a dos conceptos teóricos importantes en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, que son: esquema e invariante operatorio. El esquema se relaciona con la organización de un invariante de la conducta para una clase de situaciones (Vergnaud 1990 p. 136) citado en Da Rocha Falcão (2003), según el mismo autor como un elemento central del funcionamiento cognitivo en lo que refiere al desarrollo de los conceptos. En lo que refiere a la idea de esquemas según el autor, va desde las competencias sensorio motrices complejas hasta las competencias matemáticas, influenciadas por competencias socioculturales, a esto Vergnaud denomina *teoremas en,* que forman parte esencial de las diversas competencias socioculturales en acción con los respectivos conceptos formales que se pueden asociar. Para finalizar Vergnaud (1990) argumenta que la representación de lo real tiene un fundamento en una red semántica compleja y dinámica, por lo tanto en un contexto de que en ninguna situación se aborda un problema recurriendo a un único concepto, y ningún concepto es privativo de una única situación, es decir, los campos conceptuales se constituyen como un constructo teórico para la comprensión del desarrollo conceptual.

A partir de lo expuesto, se estudiaron los procesos y formas de representar la *resolución de problemas de estructura aditiva* que desarrollan los estudiantes dentro del salón de clases en 2° grado de primaria, así como las estrategias y dificultades que se les presentan al resolver los diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

1) Investigar la resolución de problemas de tipo aditivo en estudiantes de segundo grado de primaria.
2) Verificar la viabilidad de una secuencia didáctica que integre tipos y sub-tipos de problemas aditivos.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo a Butto y Delgado (2012) la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud pretende dar un marco de referencia en investigación relacionadas con actividades cognitivas particularmente con aquellas que tienen que ver con aprendizajes científicos y técnicos. En primera instancia fue elaborada con el fin de explicar los procesos de conceptualización de las estructuras aditivas, y multiplicativas.

Vergnaud trabaja sobre dos hipótesis: una epistemológica y otra constructivista. La primera supone que los problemas son una fuente de conocimiento y el aprendizaje se produce como consecuencia del reconocimiento y resolución de éstos dentro de un contexto. La segunda supone que el aprendizaje se construye a partir de un conflicto cognitivo y en interacción con su entorno.

Para Vergnaud (1990) la teoría de los campos conceptuales "es una teoría cognitivista que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas"

Se trata de una teoría psicológica del proceso de conceptualización de lo real (el salón de clase) que permite localizar y estudiar continuidades y rupturas entre conocimiento desde el punto de vista de su contenido conceptual (1990, p 133). El problema que se plantea Vergnaud (1996) es la relación entre el conocimiento y los problemas teóricos y prácticos a los cuales responde. Además, aborda esta relación tal como aparece en su situación real, por ejemplo, en un salón de clase.

Para Vergnaud un concepto consiste de una terna C= *(S, I, R)* donde ***S*** es el conjunto de situaciones a las que el alumno se enfrenta y dan sentido al concepto por sus vivas experiencias, *I*, es el conjunto de invariantes que son los objetos, propiedades y sus relaciones, los cuales se traducen en reglas de aplicación en ciertos dominios, *R* es el conjunto de representaciones diversas del concepto; lenguaje natural, gráficas, tablas, diseños, sentencias, etcétera, forman el bagaje que el alumno usa para enfrentar las situaciones del concepto. El primer conjunto- el de situaciones- es el *referente* del concepto, el segundo- el de invariantes operatorios- es el *significado* del concepto; en cuanto al tercero- el de representaciones simbólicas- es el *significante*. Este último (el significante), lo relacionamos para trabajar las representaciones que realizan los niños para resolver problemas aditivos y adicionamos el término de representación externa de Goldin (1998), éste incluye los sistemas de habla, símbolos escritos, modelos figurativos o imágenes, modelos de manipulación y situaciones del mundo real; representaciones producidas con lápiz y papel, representaciones construidas con materiales concretos (fichas y monedas), entre otras. De acuerdo con Brizuela y Cayton (2010), durante el proceso de resolución de un problema, la cognición del niño cambia mientras interactúa con sistemas externos de representación; y allí hay una interacción constante entre la representación y lo representado; es decir, la representación interna y externa están en interacción constante durante el proceso de resolución de problemas.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Tipo de estudio

La investigación es de tipo explicativo, pues asume los fenómenos que ocurren durante la enseñanza y el aprendizaje de los problemas aditivos con los niños, como un conjunto de diversas variables a considerar desde una visión más dinámica. Se propone comprender los procesos, significados, y la naturaleza social del proceso, así como también el papel que el investigador(a) puede asumir en un estudio.

Población

Participaron en el estudio diez estudiantes de primero y se dio seguimiento cuando estaban en segundo grado de educación básica, con edades entre seis y siete años, de una escuela pública del Distrito Federal, México. Las sesiones de trabajo se realizaron en las instalaciones de la escuela. Se trabajó en parejas y tríos de niños con la colaboración de la entrevistadora.

Para lograr los objetivos del estudio, se dividió el trabajo en tres etapas: cuestionarios iniciales seguidos de entrevistas clínica individual, actividades de enseñanza y cuestionario final. A continuación se hace una breve descripción de cada una de las etapas.

Descripción y aplicación de la primera etapa: cuestionarios iniciales de escritura numérica decimal y resolución de problemas aditivos seguidos de entrevista clínica individual. Las entrevistas se realizaron con el objetivo de indagar cómo los alumnos habían resuelto los problemas aditivos del cuestionario inicial.

De acuerdo a Delval (2001), la entrevista es un procedimiento para investigar cómo piensan, perciben, actúan y sienten los niños (se entrevistaron a 4 niños), que tratan de descubrir aquello que no resulta evidente en lo que los sujetos hacen o dicen, lo que está por debajo de la apariencia de su conducta, ya sea en acciones o con palabras. En la entrevista se pone al niño frente a una situación y se le interroga con el fin de ver cómo justifica y/o argumenta sobre una situación planteada. A continuación se describen los dos instrumentos aplicados en la primera etapa del estudio.

Tabla 1. Descripción del cuestionario inicial de escritura numérica

Pregunta	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Conteo del 1 al 10	Se le pide al niño contar oralmente del 1 al 100, observando el cuadro de números del 1 al 100.
2	Dictado de números	Se solicita al niño anotar los números que se le dictan.
3	Escritura de números	Se le solicita al niño escribir los nombres de los números de la lista.
4	Antecesor y sucesor	Se solicita al niño colocar el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.

Tabla 2. Descripción del cuestionario de Problemas de Estructura Aditiva

No.	Modelo, tipo y subtipo	Esquema	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido.	? 166 133	Luis y Susana son amigos y están organizando una fiesta para su graduación. Luis está juntando el dinero de los estudiantes de 6º “A” y Susana está juntando el dinero del 6º “B” Luis lleva 166 pesos y Susana 133 pesos. ¿Cuánto dinero tienen los dos juntos?
2	Modelo funcional; tipo combinación, diferencia desconocida.	89 27 ?	En un juego de canicas, Gabriel gana 27canicas y Mario gana varias. Los dos juntos tienen 89 canicas. ¿Cuántas canicas son de Mario?
3	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, cambio desconocido.	? 36 ➠ 89	Mónica tenía 36 dulces, el sábado fue a la fiesta de Judith, ahí le dieron algunos más. Ahora Mónica tiene 89 dulces. ¿Cuántos dulces le dieron a Mónica?
4	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, comienzo desconocido.	+30 ? ➠ 42	Miguel tenía algún dinero, su papá le dio 30 pesos más para comprar su lunch. Ahora Miguel tiene 42 pesos. ¿Cuánto dinero tenía al principio?
5	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, resultado desconocido.	-26 54 ➠ ?	En la fiesta de cumpleaños de Enrique cayó la piñata, Laura ganó 54 caramelos, le dio 26 a Mónica. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Laura?
6	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, comienzo desconocido.	-85 ? ➠ 46	Julieta tenía algunos juguetes, le dio 85 a Saúl. Ahora Julieta tiene 46 juguetes. ¿Cuántos juguetes tenía al principio Julieta?
7	Modelo funcional; tipo comparación, grande desconocido.	? 33 58	Al final de un juego de canicas Jorge tiene 33 canicas y Miguel tiene 58 canicas más que Jorge. ¿Cuántas canicas tiene Miguel?
8	Modelo funcional; tipo comparación, diferencia desconocida.	45 67 ?	Don Hugo vende helados. El día de hoy vendió 67 helados de fresa y 45 de vainilla. ¿Cuántos helados de fresa vendió más que de vainilla?
9	Modelo funcional; tipo comparación, pequeño desconocido.	46 ? 13	Julio y Susana están jugando serpientes y escaleras, Julio va en una casilla, Susana va en la casilla número 46, tiene 13 puntos más que Julio. ¿En qué casilla va Julio?
10	Modelo funcional; tipo igualación, grande desconocido.	? 24 37	Ana compró 24 paletas. Sandra compró37 paletas más que Ana. ¿Cuántas paletas tiene Sandra?
11	Modelo funcional; tipo igualación, pequeño desconocido.	? 48 15	En el cumpleaños de Enrique, su mamá infló 48 globos. Alicia infló 15 menos. ¿Cuántos globos infló Alicia?
12	Modelo funcional; tipo igualación, diferencia desconocida.	59 84 ?	Patricia tiene 84 pesos. Sandra tiene 59. ¿Cuántos pesos necesita Sandra para tener los mismos pesos que tiene Patricia?

Descripción y aplicación de la primera etapa: la aplicación de los instrumentos tuvo una duración aproximada de 60 minutos por cada cuestionario. Los niños los resolvieron individualmente. La investigadora proporcionó las instrucciones a los niños, leyó y explicó lo que deberían hacer en cada pregunta, indicó que en caso de duda, ésta podría ser aclarada y solicitó que los respondieran. Había material disponible en caso de que los niños lo requirieran: hojas de papel en blanco, papel cuadriculado, regla, lápiz y pluma. El objetivo de los cuestionarios iniciales fue identificar habilidades y dificultades que presentan los niños cuando resuelven problemas de estructura aditiva.

Descripción y aplicación de la segunda etapa: Esta etapa corresponde a la realización de actividades de enseñanza de una secuencia temáticamente dividida de acuerdo a los tipos y sub-tipos de problemas de estructura aditiva. El trabajo fue realizado por los niños en parejas y en tríos.

A partir de los datos obtenidos de la primera etapa de estudio, se diseñaron actividades enfocadas a trabajar la resolución de problemas de estructura aditiva y a fortalecer la adquisición de las reglas del SND en los niños de segundo grado de primaria. En las actividades para la resolución de problemas aditivos, se dio énfasis a trabajar los problemas que causaron mediana y alta dificultad *(Combinación con diferencia desconocida, Igualación con diferencia desconocido; Cambio disminuyendo con inicio desconocido e Igualación con grande desconocido).* El objetivo de las actividades de enseñanza fue estudiar la evolución de las estrategias de resolución de problemas, los soportes de representación y los procedimientos utilizados por los niños sobre los problemas de estructura aditiva. Esta etapa del estudio fue realizada en nueve sesiones, con una duración de una hora. A continuación se describen las actividades de enseñanza.

Tabla 3. Estructura de las sesiones de trabajo de las actividades de enseñanza

Sesión	Contenido matemático
1	Antecesor y sucesor de un número.
2	Suma y resta de números mentalmente; resolución de problemas aditivos.
3	Agrupamiento y valor posicional del SND.
4	Agrupamiento y valor posicional del SND.
5	Conteo, agrupamiento y comparación de cantidades.
6	Suma y resta de cantidades con unidades, decenas y centenas.
7	Resolución de sumas y restas, empleando el cálculo mental.
8	Resolución de problemas de estructura aditiva, empleando diversos procedimientos.
9	Resolución de problemas de estructura aditiva de tipo combinación con diferencia desconocida, cambio disminuyendo con inicio desconocido, comparación con grande desconocido, igualación con grande desconocido y combinación con final desconocido.

Descripción y aplicación de la tercera etapa: Se aplicó un cuestionario al término de la etapa experimental (actividades de enseñanza), con el propósito de analizar la evolución de las ideas aritméticas, contrastando con los resultados del cuestionario inicial y la secuencia de actividades de enseñanza. En este cuestionario se incluyen problemas de estructura aditiva del modelo funcional de tipo: combinación con final desconocido, comparación con diferencia desconocida, combinación con diferencia desconocida, igualación con diferencia desconocida, igualación grande desconocido y cambio disminuyendo con comienzo desconocido.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

El análisis de las tres etapas del estudio se organizó de la siguiente manera:

1) Categorías de resolución de problemas de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes y 2) Representaciones externas de los problemas. En la primera etapa también se organizaron categorías de escritura numérica.

RESULTADOS DE LA PRIMERA ETAPA DEL ESTUDIO

A continuación se describen las categorías de resolución de problemas para el cuestionario de escritura numérica:

1. Categorías en la escritura numérica. Los resultados de esta etapa muestran que los estudiantes desarrollan tres ideas intuitivas sobre el sistema de numeración decimal indo-arábigo, que coinciden con las categorías encontradas por Lerner y Sadovsky (2010).

2. *"Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número"* (Tomada de Lerner y Sadovsky 2010). En esta categoría se ubica a los niños que en respuesta a la solicitud de la pregunta número dos (dictado de números), al dictarles números con unidades de millar, aunque no sabían la manera de escribir algunos números, registraban la cantidad con varios dígitos.

Aunque los niños no sabían la escritura convencional de algunos números; al escuchar la cantidad dictada, la representaron escribiendo varios dígitos.

Tabla 5. Ejemplo de la Categoría 1 de escritura numérica

Números dictados	Números escritos
3585 5895	310085 58095

3. *"Los niños manejan en primer lugar los nudos - es decir las decenas, centenas, unidades de mil..., exactas- y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos"* *(Tomada de Lerner y Sadovsky 2010).* En esta categoría se ubica a los niños que escriben correctamente las cantidades consideradas como nudos, sin embargo las cantidades que se encuentran en los intervalos de los nudos no son escritas correctamente.

Tabla 6. Ejemplo de la Categoría 2 de escritura numérica

Números dictados	Números escritos
1019 1000	1009 1000

Con esta categoría observamos que los niños en la apropiación de la escritura convencional de los números no siguen el orden de la serie numérica; primero manejan las decenas, centenas, unidades de mil exactas y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos.

4. *"Los niños escriben los números tal cual lo escuchan"* (Tomada de Lerner y Sadovsky 2010). En esta categoría se ubican los niños que a partir de las centenas generan sus propias reglas de escritura.

Tabla 7. Ejemplo de la Categoría 3 de escritura numérica

Números dictados	Números escritos
1019 115 109	100109 10015 1009

Los niños al realizar este tipo de escritura numérica, establecen una relación entre la numeración hablada y la numeración escrita; ponen en juego el conocimiento que tienen de la escritura convencional de los números del sistema de numeración decimal indo-arábigo pero se deja de lado el principio posicional.

Categorías en la resolución de problemas de estructura aditiva

A continuación se describen las categorías de resolución de problemas para el cuestionario de problemas de estructura aditiva.

1. Transcodificación literal completa (600506 en vez de 656), retomada de Brizuela y Cayton, (2010). En esta categoría, el niño resuelve el problema planteado, obtiene el resultado correcto, pero escribe la cantidad literal o agrega uno o dos ceros más, por ejemplo, 600506 en vez de 656. Los niños se encuentran en un proceso donde el 0 está en construcción, aún no le asignan un significado. Este procedimiento es parte del proceso de la adquisición de las reglas del SND, que poco a poco se van apropiando.

2. Cuenta todo (Retomada de Maza, 1999). En esta categoría, el niño resuelve el problema utilizando la estrategia de "contar todo"; es decir, representa el primer sumando con los dedos, monedas o dibujos; posteriormente el segundo sumando de la misma manera, cuenta todos los elementos iniciando por el primero y lo representa numéricamente y de manera adecuada.

Una de las primeras ideas intuitivas que los niños desarrollan al resolver un problema aditivo, es la representación externa de la resolución de dicho problema con el apoyo de objetos o dibujos.

3. Estrategia de complemento. En esta categoría, el niño parte de la representación del problema con fichas o dibujos; "busca sin hacer una sustracción, lo que hay que añadir o quitar al estado inicial para llegar al estado final" (Vergnaud, 2010, p. 172). Está estrategia fue una de las más utilizadas por los niños, se considera que fue así porque en ella se añaden o se quitan objetos para llegar a una cantidad deseada, sin desarrollar el algoritmo de la sustracción de manera convencional. Además el niño cuenta oralmente los objetos o dibujos de uno en uno.

4. Transcripción de información del enunciado del problema. En esta categoría, los niños identifican información en el enunciado del problema y la transcriben como resultado.

5. Uso equivocado del algoritmo. En esta categoría, el niño hace la operación contraria a la requerida para resolver el problema; realiza una suma en vez de una resta, o viceversa. Consideramos que falta claridad en lo que se pide en el problema; pareciera que los niños sólo identifican las cantidades que aparecen en el enunciado del problema y suman o restan, sin tener claridad de ¿qué es lo que dice el problema?, ¿qué se pide? y ¿cómo se debe resolver?

6. Uso adecuado del algoritmo. En esta categoría, el niño resuelve por medio del algoritmo de la suma o resta de acuerdo con el problema planteado.

7. Uso del algoritmo incompleto. En esta categoría, el niño resuelve el problema con una suma y baja las cantidades (escribe todos los números sin considerar la posición de los mismos en el sistema).

REPRESENTACIONES EXTERNAS DE LOS PROBLEMAS

De acuerdo con Goldín (1998), para entender el aprendizaje y la resolución de problemas aditivos, es necesario considerar la representación interna por el estudiante. Las configuraciones internas no pueden ser observadas directamente, sino que pueden deducirse de la conducta observable. Los niños al resolver los problemas aditivos, los representan externamente de diferentes maneras, las categorías que encontramos en este estudio fueron:

1. Representación externa del problema con apoyo de objetos. En esta categoría el niño representa con fichas la resolución del problema. Si es una adición representa los dos sumandos con fichas y después cuenta todas. Si es una sustracción representa el minuendo con fichas, separa las que representan el sustraendo y cuenta las que quedaron. También utiliza el conteo con los dedos de sus manos.

2. Representación externa del problema con apoyo de gráficos. En esta categoría el niño representa el problema con dibujos o marcas en el papel.

3. Representación externa del problema de manera simbólica. En esta categoría el niño recurre al algoritmo convencional de la suma o la resta para resolver el problema.

A continuación se reproduce un ejemplo de uno de los problemas abordados en el cuestionario inicial, donde el estudiante resuelve el problema con el algoritmo, pero al bajar las cantidades al resultado escribe las cantidades completas sin tomar en cuenta su valor posicional.

A continuación se reproduce un fragmento de la entrevista:

Entrevistador: Primero pusiste las ocho.
Aldo: Mmmmmhhh.
Entrevistador: Luego pones cuatro. Y ya qué pusiste las ocho y luego las cuatro, ¿qué haces?
Aldo: Mmmm, ya le pongo el resultado.
Entrevistador: Y ¿cuál fue el resultado?
Aldo: Doce.
Entrevistador: Bien. Ahora el siguiente número. Es el cinco, más seis. Ahí ¿cómo le hiciste?
Aldo: Igual contando.
Entrevistador: ¿Igual contando? ¿Quieres contar?
Aldo: Sí. (Cuenta oralmente de uno en uno y va pasando las fichas). Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once. Once.
Entrevistador: Bien. ¿Cuándo tú haces otra suma, siempre empiezas del lado izquierdo, de este lado? (Señala en la operación que realizo Osvaldo, el lado izquierdo).
Aldo: Sí
Entrevistador: ¿Sí? Y ¿anotas los números completos? ¿Cómo acá? (Señala el resultado de la suma)
Aldo: Ajá.

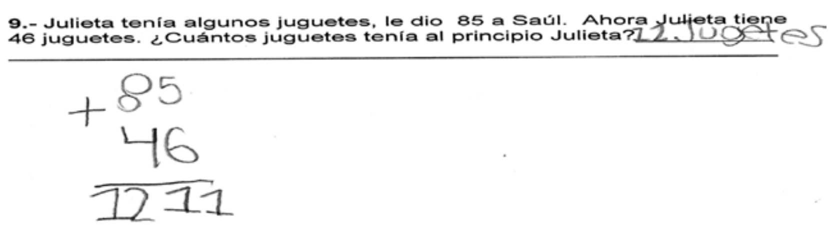
COMENTARIO DE LA ENTREVISTA

De acuerdo a la entrevista, el niño identifica los datos numéricos del problema, realiza una suma y la resuelve con apoyo de fichas. El resultado lo representa con las cantidades completas de unidades y decenas. No alerta para uno de los principios del sistema de numeración decimal, que es el valor posicional, por esta razón escribe los números completos (1211 en vez de 121). Las dificultades que los niños presentan con el algoritmo de la adición deben ser reconceptualizadas, pues los estudiantes están en proceso de la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal. De acuerdo con Hernández y Butto (2011), los niños deben comprender que en los sistemas de numeración posicional como el nuestro, la numeración y el valor de un digito depende tanto del símbolo utilizado como de la posición que este número ocupa en el número. Por otro lado, el desarrollo de competencias se da de manera implícita en las acciones que los niños realizan al resolver diferentes tipos y subtipos de problemas.

RESULTADOS DE LA SEGUNDA ETAPA DEL ESTUDIO

En las actividades de la secuencia didáctica, los estudiantes mostraron un avance en lo que refiere a los problemas aditivos planteados y los procedimientos utilizados para resolverlos; fueron reconociendo que ciertas estrategias intuitivas se asemejan a estrategias formales y otras no, por ejemplo: para resolver problemas aditivos de tipo *combinación con resultado desconocido*, en el cuestionario diagnóstico emplearon el conteo de objetos de uno en uno y oralmente; al finalizar las actividades de la secuencia didáctica, ese mismo tipo de problemas lo resolvían con el algoritmo de la suma. También se encontraron las categorías de las representaciones externas de la primera etapa del estudio, por ejemplo: *1.- Representación externa del problema con apoyo de objetos, 2.- Representa-*

Figura 1. Ejemplo de la categoría siete



ción externa del problema con apoyo de gráficos y la 3.- Representación externa del problema de manera simbólica.

RESULTADOS DE LA TERCERA ETAPA DEL ESTUDIO

CATEGORÍAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

En la primera y tercera etapa del estudio se encontraron las tres primeras estrategias: 1. Estrategia de complemento, 2. Uso equivocado del algoritmo, 3. Uso adecuado del algoritmo, y la cuarta estrategia, el uso del cálculo mental fue una categoría nueva. En esta última categoría, el niño suma mentalmente las cantidades; recurre a hechos conocidos, por ejemplo, para sumar 13 + 9 + 40, suma primero las decenas 40 + 10 = 50; continúa con el número mayor de unidades (9), 50 + 9 = 59, y finalmente agrega 3 al 59; 59 + 3 = 62. Otra respuesta encontrada, 5. Estrategia por inferencia u otra. En esta categoría se clasifican las preguntas que los niños contestaron por inferencia, o las respuestas que no tenían relación directa con la pregunta.

Discusión

A partir de los resultados obtenidos en las tres etapas se concluye que los niños elaboran ideas intuitivas sobre el sistema de numeración decimal indo-arábico (SND), a temprana edad y estas ideas intuitivas están estrechamente relacionadas con el aprendizaje de los algoritmos de la suma y la resta. En lo que refiere a la parte conceptual de los problemas de estructura aditiva, los niños son capaces de resolver diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos, desarrollan competencias para comprender los problemas. Además, los niños modifican los soportes de representaciones externas cuando se enfrentan al proceso de resolución de un problema, estos soportes de representación constituyen una parte fundamental en la cognición del niño, pues ésta cambia mientras, el niño interactúa con sistemas externos de representación; ocurre una interrelación entre la representación y lo representado.

Es importante que el profesor conozca los diferentes tipos y subtipos de problemas, la estructura sintáctica y semántica de los problemas; así como las estrategias para resolver los problemas de acuerdo al modelo matemático, entre otros aspectos. El profesor puede explorar diferentes soportes de representación, y diversas estrategias de resolución de problemas para que los niños desarrollen un pensamiento más flexible y tengan oportunidad de externar sus ideas cuando resuelven problemas matemáticos, para favorecer la apropiación del campo conceptual aditivo, pues éste requiere un proceso largo de aprendizaje.

Por otro lado, algunos autores señalan que se debe esperar una edad adecuada para iniciar la enseñanza del sistema de numeración decimal indo-arábico y el algoritmo de las operaciones fundamentales, pero contrariamente a esta creencia, los niños muestran evidencias significativas de que elaboran sus propias hipótesis respecto a los números y a las estrategias de resolución de problemas aditivos. Los niños recurren a una diversidad de estrategias intuitivas para resolver los problemas planteados, lo que ciertamente revela un nivel de madurez intelectual que requiere ser potencializada en el salón de clase de matemáticas, además es necesario reconceptualizar "las dificultades" como un proceso inherente al acto de aprender.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACYT) por el financiamiento de la investigación *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria,* mediante las becas para estudiantes de maestría en Desarrollo Educativo, Línea Educación Matemática UPN-Ajusco, número de becaria 379652. Fecha de examen de grado 12 de diciembre de 2012.

REFERENCIAS

Aguilar, V. M. y G. J. Navarro (2000). *Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. En: Revista de Psicología General y Aplicada.* 53 (11), 63-83.

Brizuela, B. y G. Cayton, (2010). *Anotar números desde pre-escolar hasta segundo grado: el impacto del uso de dos sistemas de representación en la presentación.* En Revista *Cultura y Educación,* Vol. 22, No 2. pp.149-167.

Butto, C. y Delgado, J. (2012). *Rutas hacia el algebra: actividades en Excel y Logo.* México, UPN, SEP.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1996). *Los números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis.

Da Rocha Falcão, J. (2003). *Psicología da Educação Matemática, Una Introdução.* Belo Horizonte, Brasil: Auténtica

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños. Temas de Psicología,* España: Paidós.

Flores, M. R. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. En: *Revista Educación Matemática.* 17 (2). pp. 7-33

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics En: *Journal of Mathemathical Behavior,* 17 (2), 137-165.

Hernández, Y. y C, Butto, (2011). *Adquisición del concepto de adición por niños de primer y segundo grados de primaria de una escuela pública del estado de Morelos.* En López, G. Roger, S. y Reyes, M. A. (Editores), *Investigación en comunicación humana: Problemas, intervenciones y nuevas tecnologías,* (pp. 97, 122.) México, Ediciones Mínimas.

INEE [Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación]. (2010). *México en PISA 2009.* México: INEE. Capítulos 1 y 5, pp. 13-26 y 99-114.

Lerner, D. (1997). *La matemática en la escuela. Aquí y ahora.* Argentina. Aique.

Lerner, D. y P. Sadovsky, (2010). El sistema de numeración: Un problema didáctico. En Parra, C. y Saiz, I. (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones,* (pp. 95-182). México: Paidós 1994. (Reimpresión 2010).

LLECE–UNESCO (2000). Primer estudio internacional comparativo sobre lenguaje, matemática y factores asociados, para alumnos de tercer y cuarto grado de la educación básica. Segundo Informe, Santiago de Chile: UNESCO

Maza, C. (1999). *Enseñanza de la suma y la resta.* España, Síntesis.

Puig, L. y F. Cerdán. (1989). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid, Síntesis.

Reimers, F. (2003). *El contexto social de la evaluación educativa en América Latina.* En: Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 33, 9-52.

SEP. Subsecretaría de Educación Básica (2009) *Plan de Estudios 2009.* México.

SEP. Subsecretaría de Educación Básica (2011) *Plan de Estudios 2011.* México.

Saaty, T. L. y Joyce, A. M. (1981). *Thinking with models.* Oxford.

Terigi, F. y S. Wolman (2007). Sistema de numeración: Consideraciones acerca de su enseñanza. En: *Revista Iberoamericana de Educación,* 043(4), 59-83.

UNESCO LLECE. (2008). *Resumen Ejecutivo del Primer Reporte de Resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo.* Chile: UNESCO, LLECE.

Vergnaud, G. y C. Durand, (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. En: Coll. C. (Comp.). *Psicología genética y aprendizajes escolares.* Madrid, España. Siglo XXI.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales en *Recherches en Didáctique des Mathématics.* Traducción de Godino, J. D. Vol. 10 n° 2. 3. Pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1999). *Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica.* Perspectivas, 26 (10), 195-207.

Vergnaud, G. (2010). Los problemas de tipo aditivo. En: *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas, 1991 (reimpresión 2010).