EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA EN DOS AMBIENTES[1]

Dra. Cristianne Butto Zarzar[2]
Centro de investigación y de estudios avanzados CINVESTAV.
Sistema Nacional de Investigaciones México
Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco. México

Fecha de Recepción Septiembre 10, 2013
Fecha de Aprobación Octubre 10, 2013

RESUMEN

El estudio investigó el aprendizaje de las fracciones con estudiantes de 6º grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal, México, D.F en dos ambientes: lápiz y papel y recursos interactivos. Objetivos, describir las dificultades que los alumnos tenían en el aprendizaje de las fracciones, diseñar y aplicar una secuencia didáctica que tomó en consideración tanto aspectos matemáticos como cognitivos; y verificar la evolución de las nociones matemáticas. Los resultados revelaron que algunos estudiantes se encuentran en la transición del campo de los números enteros hacia los racionales, por lo tanto, surge la necesidad de diversificar los soportes de representación matemático con el objetivo de propiciar un mejor entendimiento de dicho campo conceptual.
Palabras clave: fracciones, educación primaria, aprendizaje, propuesta didáctica.

THE FRACTION LEARNING IN PRIMARY EDUCATION: A TEACHING PROPOSAL IN TWO ENVIRONMENTS

ABSTRACT

The study investigated the learning of fractions with students of sixth grade of a public school in Mexico City in two environments: paper and pencil and interactive resource. The main objectives are to describe the difficulties that students have in learning fractions, designing and implementing a teaching sequence that take into account both mathematical and cognitive aspects, and check the evolution of mathematical notions. The results revealed that some students are in transition from the cognitive field of integer to rational numbers. This findings point out the need of diversifying the mathematical representation media in order to promote a better understanding.
Key words: Fractions, primary education, learning, didactic proposal.

1 Investigación realizada con niños y niñas de 6º grado de primaria en la Universidad Pedagógica Nacional Ajusco y una Escuela pública del Distrito Federal México, titulada: Aprendizaje de las fracciones en dos ambientes: lápiz y papel y recursos interactivos.

2 Profesora T/C Titular C, Área Académica Número 4, Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco, México, D.F. Dra. en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados CINVESTAV, Perteneciente al Sistema Nacional de Investigadores SNI Nivel 1.

INTRODUCCIÓN

El concepto de fracción está presente en los más diversos contextos de uso. En el contexto escolar, fracción hace parte del currículo de educación básica. Se observa, que a pesar de que la mayoría de los estudiantes pasan un tiempo razonable de instrucción escolar, continúan enfrentando problemas con ese concepto matemático.

En el proceso de transposición didáctica[3] del campo matemático para la esfera didáctico-pedagógica, el simbolismo a/b pasa a tener un significado restringido. Aquí fracción es vista como una partición; como la representación de la conjugación de dos acciones: dividir/tomar (dividir/comer, dividir/pintar). La fracción ¾, por ejemplo, representa dividir un todo en cuatro partes iguales y tomar tres. En ese abordaje, las representaciones más usuales en la escuela son pizzas, pasteles y figuras geométricas que acaban reduciendo las ideas que involucran el referido concepto. De acuerdo con Maia, Cámara y Cámara (1991) la idea de fraccionamiento trae consigo una idea explícita de que cuando algo es dividido, es necesariamente dividido en porciones menores que el todo inicial, cada una de esas porciones menores es igual y es una fracción de lo que fue un "todo" en su forma original. Cuando el "todo" no es suficientemente claro para los estudiantes, la idea de unidad es oscura y el fraccionamiento es difícil. Las dificultades típicas que los niños enfrentan con ese abordaje se presentan al tratar con una fracción impropia (e.g., 5/2). De acuerdo con esta perspectiva de fraccionamiento, tendríamos que el número de partes tomadas es mayor que el número de partes divididas. De acuerdo con esos autores, algunos sujetos afirmaban que *"el número de arriba es cuántas partes se va a pintar y el de abajo cuántas partes se va a dividir el círculo"*; en ese sentido, se reafirma la comprensión de la fracción en términos de la conjugación de dos acciones: dividir/tomar. Ese abordaje en el concepto de fracción es común en los libros de texto para la enseñanza primaria. Davydov y otros (1991), por ejemplo, critican el aprendizaje de concepto de fracción en los manuales tradicionales de matemática elemental.

Chaffe-Stengel y Nodding (1982), creen que esa manera de abordar el concepto de fracción en la instrucción escolar es guiado por un modelo conceptual parte-todo y el concepto de fracción aparece como parte de cosas que no son números. Aquí surge, entonces un obstáculo para los niños: ¿Cómo pueden entender fracción cuando son llamados a operar, por ejemplo, con una suma o una resta de fracciones, particularmente con denominadores distintos, cuando la metáfora "fracción como parte" ofrece pocos elementos para resolver ese problema? Aún así la metáfora sería rudimentaria e impediría la interrelación entre la comprensión simbólica y numérica. De esa manera, los niños cometen errores sistemáticos derivados de la metáfora de fracción como parte-todo, como en el caso de las fracciones impropias. *Si las fracciones son parte de un todo, entonces ¿Cómo podemos hablar de una cosa que es mayor de una cosa de la cuál partimos?* Se concluye que el entendimiento de fracciones como partes de un todo no posibilita el entendimiento adecuado del concepto y crea una dependencia con los objetos concretos.

Otra falla es la variedad de operaciones sobre fracciones requeridas para forzar al estudiante a aprender los algoritmos para cada una de las operaciones, resultando en una graduación de señales que permanece aislado de la comprensión de todos los números que están interconectados, así por ejemplo, se comienza por entender ½ como dividir el todo en dos partes y tomar una; posteriormente en la multiplicación de fracciones se enseña la regla "ad hoc" ½ × 5 significa "tomar la mitad de 5", se introduce como una propiedad adicional, mística de la fracción ½. Chaffe-Stengel y Nodding (1982) creen que es necesaria una secuencia de conceptos que lleven a los niños a comprender mejor la transición de los números enteros a los números fraccionarios.

[3] Transposición didáctica: Chevallard (1985) Denomina la transposición didáctica al conjunto de transformaciones que sufre el saber científico antes de ser enseñado. Este proceso va desde la selección del conocimiento a ser enseñado hasta su adaptación al sistema didáctico, existiendo todo un proceso que genera deformaciones, del establecimiento de coherencia hasta la creación de nuevos conocimientos, concluyendo con el saber escolar.

Las fracciones como parte constituyente de los números racionales hacen parte de este estudio aquí reportado. La mayoría de los estudiantes ven las fracciones como *"parte de un todo"* y los procedimientos utilizados por ellos cuando trabajan con fracciones indican que prefieren tratar el denominador y el numerador como entidades separadas. Bajo esta concepción, evidentemente la comparación de fracciones es un problema, la equivalencia de fracciones, la magnitud, estimación y otras ideas importantes que determinan el sentido numérico de las fracciones.

Escolano y Gairín (2005) mencionan que el origen del significado del concepto de fracción como relación parte-todo surge de las necesidades humanas como lo sostiene Bishop (1999) (citado en Escolano y Gairín, 2005), pues según argumentan estos autores, el origen del concepto de número racional se encuentra en la idea de medida de cantidades de magnitud y que además este significado (fracción como relación parte-todo) tampoco fue elaborado por las matemáticas. Los mencionados autores creen que ese significado de fracción más bien fue creado por necesidades del proceso de enseñanza y aprendizaje, y éste provoca una serie de obstáculos didácticos como los que fueron mencionados con anterioridad. Además de acuerdo a los autores, dicho modelo, dificulta la noción de número racional y obstaculiza la formación de ideas abstractas.

Por otro lado, esta temática ha sido estudiada por diversos autores y en diversas áreas del conocimiento. Los estudios de demanda cognitiva, por ejemplo, investigaciones desarrolladas por Piaget, Inhelder y Szeminska (1960), el concepto de fracción involucra una relación parte-parte (cuantificación extensiva) y una relación parte-todo (cuantificación intensiva): la relación parte-parte garantiza que un todo puede ser dividido exhaustivamente (sin resto) en partes equivalentes: la relación parte-todo asegura la comprensión de que la parte está siempre contenida en el todo y que juntas lo componen. Para ellos, la comprensión de las fracciones implica considerar los siguientes aspectos:

- La existencia de un todo divisible, es decir, el todo necesariamente debe ser dividido en partes. La existencia una relación entre el número de partes, dependiendo de la figura geométrica a ser subdividida;
- Exigencia de la determinación del número de esas partes. El todo debe ser dividido exhaustivamente y no se puede subdividir parte del todo e ignorar las otras partes del mismo todo. La igualdad de las partes, para que la subdivisión no sea puramente cualitativa, pero corresponda a la cuantificación aritmética;
- La concepción de cada fracción como una parte y un todo en sí, susceptible de nuevas divisiones;
- Atención al principio de invariancia: la suma de las fracciones constituídas es igual al todo inicial.

En consonancia con la perspectiva Piagetiana, Behr, Lesh, Post y Silver (1983) creen que el concepto de número racional es una de las ideas más complejas e importantes de las matemáticas. Desde el punto de vista práctico, el concepto de fracción es aplicable a una gran cantidad de situaciones y problemas de la vida diaria; para la psicología cognitiva constituye un área con la cual se pueden desarrollar estructuras mentales necesarias para dar continuidad al desarrollo intelectual; finalmente, para las matemáticas el entendimiento de las fracciones es fundamental para comprender las operaciones algebraicas elementales.

Spinillo y Bryant (1997), se contraponen a la perspectiva piagetiana, principalmente en lo que respecta al razonamiento proporcional y afirman que los niños poseen ese razonamiento anterior al estadio de las operaciones formales y por lo tanto, pueden aprender ideas básicas sobre mitad en edades más tempranas. Dichos autores realizaron un estudio en el cuál pedían a niños que compararan ciertos modelos de proporción con figuras en azul y blanco; se les pedía escoger cuál tenía la misma cantidad (la misma proporción) de azul que blanco. Los niños sólo usaban una información no numérica para resolver la tarea.

Los resultados muestran la importancia de la idea de mitad en el razonamiento proporcional de los niños, razonamiento importante para que posteriormente puedan entender las relaciones parte-parte y parte-todo del concepto de fracción.

Vergnaud (1983), afirma que el concepto de fracción comprende dos relaciones fundamentales: La relación parte-todo y relación parte-parte. El autor resalta algunas características básicas para la adquisición de ese contenido matemático, en que los estudiantes deben comprender que un todo es siempre compuesto por elementos separados y que una fracción implica un determinado número de partes. El todo puede ser exhaustivamente subdividido, pero no se puede subdividir partes del todo e ignorar las otras partes. El todo existe en una relación entre el número de partes y las divisiones. A pesar de compartir algunas ideas piagetianas, para el referido autor, los invariantes mencionados deben necesariamente ser complementados tomando en consideración los soportes de representación, así como también los contextos de uso. Vergnaud (op cit 1990) afirma que la formación de un concepto, no coloca apenas aspectos prácticos, como también teóricos y cree que el entendimiento de las fracciones no se limita apenas a la manipulación de objetos, pero también implica en la consideración de aspectos mucho más amplios y los denomina de campos conceptuales.[4] De acuerdo con el autor, el conocimiento emerge de problemas que puedan ser resueltos. En ese sentido, la instrucción escolar debe ofrecer diversas situaciones, en las cuales puedan descubrir diversas relaciones en un mismo contenido matemático.

También afirma que tanto las concepciones, como los modelos y teorías son formados a partir de las situaciones que experimenta un sujeto. Sabemos que existen lagunas entre el conocimiento que los estudiantes poseen en un determinado contenido matemático. Por ejemplo, en fracciones ellos pueden hacer referencia a un conjunto de situaciones, tan limitado que los alumnos no podrán comprender ni usar las herramientas necesarias para resolver ciertas situaciones problemas. Es importante que los educadores estén alertas para entender que el aprendizaje del concepto de fracción no puede ser dirigido exclusivamente sobre la base de definiciones. De acuerdo con ese autor, las concepciones que los alumnos tienen del concepto de fracción sólo pueden cambiar, si ellos son expuestos a establecer relaciones entre las diversas ideas que involucran ese concepto.

Zerman (1991), por ejemplo, puntualiza la capacidad de los niños para operar con fracciones, cuando la referencia ¼ y la referencia al entero como ancla para sumar fracciones.

Singen-Freeman y Goswani (2001), investigaron la habilidad de los niños para establecer equivalencias entre cantidades continuas y discontinuas.

Bezerra y otros (2002), argumentan que la enseñanza tradicional tiende a valorar el cero de los símbolos y los niños presentan obstáculos en la comprensión de los problemas, en la lógica que subyace la acción de los algoritmos cuando operan con fracciones.

Streefland (1993), hace un análisis curricular e identifica dos problemas con las fracciones: el primero es no considerar la complejidad de las fracciones en la evolución del aprendizaje de los niños; y, el segundo consiste en la aproximación mecanicista que se hace de las fracciones, alejándose de la realidad y utilizando normas rígidas.

El estudio que presentamos estudió la dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones.

A continuación se describen los objetivos del estudio.

[4] De acuerdo con Vergnaud (1982), para que una situación pueda ser entendida necesita combinar varios conceptos y cada concepto isoladamente puede ser mobilizado para la comprensión de diversas situaciones. Tal consideración cognitiva sería aquella propuesta por la idea de campos conceptuales. Según el autor, los diversos dominios en matemáticas obedecerían a esa organización, es decir, se organizan en campos conceptuales.

Objetivos del Estudio

- Describir las dificultades que los alumnos presentan en el aprendizaje de las fracciones asociadas al modelo matemático.
- Diseñar y aplicar una secuencia didáctica que tome en consideración tanto aspectos matemáticos como cognitivos.
- Reportar la evolución de las nociones matemáticas.

MARCO TEÓRICO GENERAL

El marco teórico se fundamenta en la propuesta de Kieren (1993). El autor argumenta que el conocimiento integral del número racional no sólo requiere de la comprensión de cada idea sino también de cómo se interconectan, por lo tanto, es importante obtener información acerca de las variables y relaciones que intervienen en el conocimiento matemático de ese campo conceptual. Para el mencionado autor, dicho aprendizaje solo puede ser visualizado a partir de la idea de Constructo: y lo define como la acción en la que el sujeto aprehende del mundo un objeto mental y concibe el entendimiento de las fracciones por sub-constuctos de los cuales logra reconocer cuatro: relación parte-todo y parte-parte, cociente, razón, operador y medida.

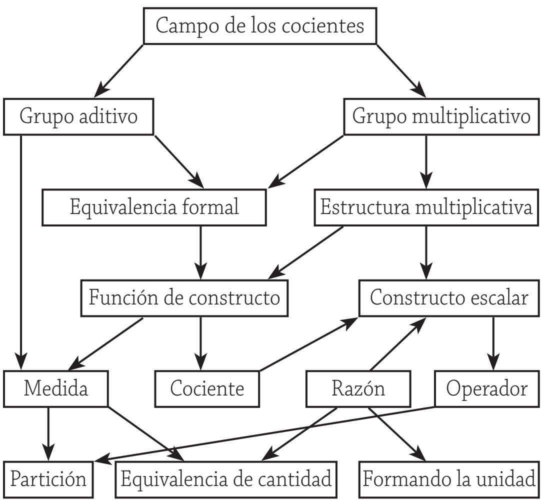


Figura 1. Esquema propuesto por Kieren (1976)

El autor propone el anterior esquema conceptual para poder comprender las fracciones. Modelo Recursivo para el entendimiento de los racionales.

De acuerdo con el esquema anteriormente presentado por Kieren (1976) considera que el modelo posee un orden implícito acerca del pensamiento de los números racionales. En el nivel más bajo del modelo contiene el conocimiento básico de las herramientas intuitivas, aquí están las ideas de partición, equivalencia y la formación de la unidad, en el nivel II están las ideas de medida, cociente, razón y operador que conforman el constructo escalar y funcional. En el está el pensamiento formal multiplicativo, el nivel IV representa el conocimiento estructural de los racionales, es decir, sus significados matemáticos. De acuerdo al autor, el sistema simbólico ofrece un nivel de abstracción del sistema formal a/b, pero que también involucra un sistema informal, por lo tanto, es importante, describir inicialmente, las características de los números racionales, para posteriormente discutir las características elaboradas por los estudiantes sobre dicho contenido matemático.

Metodología

El tipo de estudio es de corte cualitativo, pues asume los fenómenos que ocurren durante la enseñanza y el aprendizaje como un conjunto de diversas variables a considerar desde una visión más dinámica. Participaron del estudio 26 alumnos de 6º grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal cuyas edades oscilaron entre los 10 y 12 años de edad. Las etapas del estudio fueron tres: cuestionario inicial de fracciones seguido de una entrevista clínica individual, secuencia didáctica en dos ambientes: lápiz y papel e interactivos libres, y cuestionario final de fracciones.

Etapas del estudio:

Primera etapa: Diseño y aplicación de un cuestionario inicial y entrevista clínica individual.

Diseño y aplicación de un cuestionario inicial que exploró las ideas de mitad, entero o unidad, fraccionamiento en cantidades continuas, fraccionamiento en cantidades discretas, representación fraccionaria en la recta numérica, representación de fracciones propias e impropias, suma y resta de fracciones. (Ver anexo 1).

Entrevista clínica individual

La entrevista clínica individual es un tipo de entrevista que se elabora para un individuo en especial, de quién se conoce a detalle sus antecedentes sobre el tema a ser investigado por medio del cuestionario inicial. Su objetivo es profundizar en las ideas que el sujeto tiene sobre algunos aspectos de los números racionales.

Este tipo de entrevista de acuerdo a Delval (2001) es un procedimiento para investigar cómo piensan, perciben, actúan y sienten los niños. Se trata de descubrir aquello que no resulta evidente en lo que los sujetos hacen o dicen, lo que está por debajo de la apariencia de su conducta, ya sea en acciones o con palabras. El experimentador está en presencia del sujeto al que suele estudiar individualmente y se establece una interacción. Se pone al niño frente a una situación y se le interroga con el fin de ver como el niño justifica y/o argumenta sobre una situación planteada. El objetivo es estudiar cómo el sujeto construye sus interpretaciones de la realidad.

Segunda etapa del estudio: Diseño y aplicación de una secuencia didáctica

Se aplicó una secuencia didáctica en dos contextos: lápiz y papel e interactivos. Se diseñaron actividades en lápiz y papel que exploraron las ideas de: relación parte-parte, parte-todo y formación de la unidad, equivalencia y ampliar la noción de fracción; escribir fracciones para representar partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones), fracciones en la recta numérica fracciones propias e impropias con la finalidad de interconectar dichos contenidos matemáticos en dos ambientes.

En lo que respecta a las actividades propuestas en lápiz y papel, se tomó como guía el trabajo de Coxford y otros (1975), y se compone de seis partes que se describen a continuación:

1. Unidad.
2. Partes de una unidad usando materiales concretos.
3. Nombres orales para partes de la unidad.
4. Escribir fracciones para representar partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones).
5. Representar fracciones con dibujos.
6. Ampliar la noción de fracción.

A continuación se describe en que consiste cada una de estas partes.

Los pasos realizados en la secuencia propuesta por Coxford y otros (1975) intenta enfatizar los siguientes puntos del concepto de fracción:

1. Unidad
   - Identificar el número de unidades.
   - Identificar cantidades mayores o menores de la unidad.
2. Partes de una unidad usando materiales concretos:
   - Identificar el número de partes de una unidad.
   - Identificar partes del mismo tamaño.
   - Dividir una unidad en partes iguales.
3. Nombres orales para partes de la unidad:
   - Establecer el nombre de las fracciones.
   - Usar las fracciones para contestar a ¿cuántos?
   - Identificar fracciones iguales a uno.
4. Escribir fracciones para representar partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones);
   - De forma oral a forma escrita:
   - De forma escrita a forma oral.
   - De una forma concreta a forma escrita.
   - De forma escrita a alguna forma concreta.
5. Representar fracciones con dibujos:
   - Transición de objetos a diagramas.
   - Repetición de los pasos anteriores pero con los diagramas.
6. Ampliar la noción de fracción:
   - Fracciones mayores que uno.
   - Números mixtos.
   - Modelo discreto, utilización de conjuntos.
   - Comparar fracciones, fracciones equivalentes.

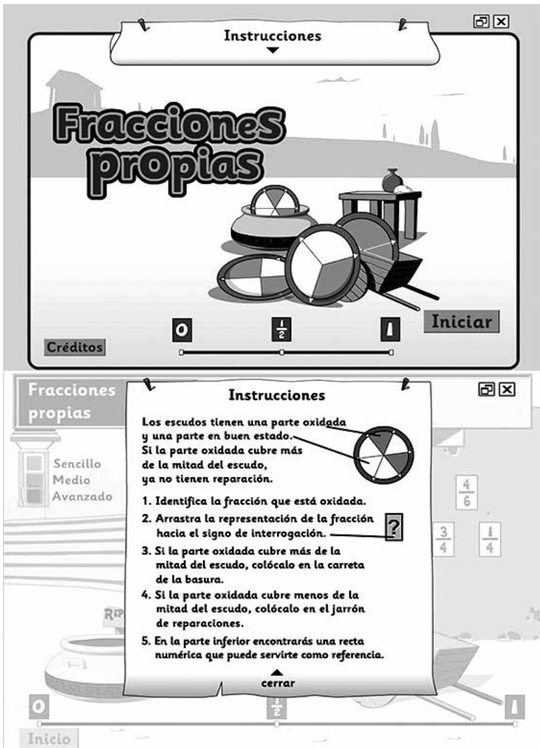
Para el contexto de los interactivos, utilizamos los recursos diseñados por el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa (ILCE, México). Éstos fueron elaborados para potenciar programas de capacitación y formación por medio de internet, desarrollan materiales interactivos multimedia, simuladores, juegos animaciones en 2d y 3d, realidad virtual. Se trabajaron cinco recursos interactivos, pero aquí solo se hace mención a algunos de ellos. Estos interactivos fueron utilizados con los estudiantes que participaron en el estudio aquí mencionado.

Interactivos de Enciclomedia

A continuación se presentarán imágenes de los recursos interactivos. Los siguientes recursos interactivos se trabajaron como parte de la secuencia didáctica.

Para las fracciones propias: recurso interactivo para trabajar las fracciones propias e impropias.

Figura 2. Recurso Interactivo



Balanza para trabajar equivalencia de fracciones: recurso Interactivo: balanza para trabajar la idea de equivalencia de fracciones.

Figura 3. Recurso interactivo

Tercera etapa del estudio: Diseño y aplicación de un cuestionario final

La tercera etapa del estudio constó del diseño y aplicación de un cuestionario final, que exploró ideas matemáticas sobre números racionales que se utilizaron en el cuestionario inicial, pero con una versión distinta. El propósito de este cuestionario fue verificar si las actividades de la secuencia didáctica propiciaron un avance conceptual de las ideas matemáticas exploradas en las etapas anteriores.

Análisis de los datos

El análisis de los datos constó de cuatro niveles de análisis: acierto, error y no responde, niveles de logro para las fracciones (alto, medio e inicial) y estrategias de resolución de problemas de problemas y análisis clínico.

Niveles de logro para las fracciones

Se entiende el nivel de logro como una especie de ruta del proceso de aprendizaje del estudiante en lo que refiere al tipo de pregunta, contenido matemático que presentan los estudiantes para una determinada tarea matemática y que puede servir para guiar al docente acerca de las necesidades educativas de los alumnos (tomado de SIMCE 2007)

Nivel de logro alto

En este nivel, los estudiantes comprenden las tres ideas básicas de fracción: partición, equivalencia y formación de la unidad; idea de fraccionamiento en cantidad continua y discreta: representación de las fracciones en la recta numérica y no numérica. Comprensión de lo que representan las fracciones propias e impropias y su representación, gráfica y numérica.

Nivel de logro medio

En este nivel, los estudiantes comprenden algunas de las ideas básicas de fracción: partición, pero presentan dificultad con la idea de equivalencia y la formación de la unidad en fraccionamiento en cantidad continua, discreta y en la recta numérica y no numérica. No comprenden ni representan de manera satisfactoria las fracciones impropias.

Nivel de logro inicial

En este nivel, los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de las ideas básicas: partición, equivalencia y formación de la unidad. Cabe señalar que al tener dificultades en la comprensión de las ideas básicas, también presentan dificultad en la comprensión de ideas más complejas y en la representación de esas ideas matemáticas.

Estrategias de resolución de problemas

El segundo nivel de análisis incluye las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes para resolver las preguntas o situaciones planteadas en el cuestionario inicial de fracciones. Estas fueron obtenidas a partir de las respuestas de los estudiantes al cuestionario inicial. Estas respuestas fueron categorizadas de acuerdo al contenido matemático explorado en el instrumento. A continuación se describen y ejemplifican algunas de esas categorías encontradas.

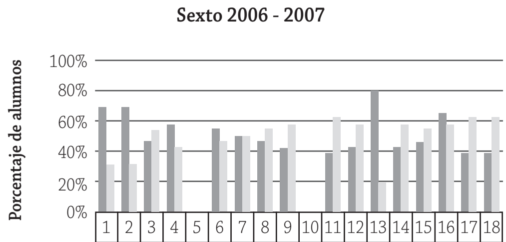
Análisis clínico de las entrevistas individuales

El análisis clínico de la entrevistas individuales tuvo el objetivo de indagar acerca de las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes para resolver las preguntas planteadas en el cuestionario inicial.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al primer nivel de análisis: acierto, error.

RESULTADOS

Figura 4. Resultados del cuestionario inicial de fracciones



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
% Acierto	69	69	46	58	0	54	50	46	42	0	38	42	81	42	46	65	38	38
% Error	31	31	54	42	0	46	50	54	58	0	62	58	18	58	54	58	62	62

Preguntas

A partir de los resultados obtenidos en el cuestionario inicial, diez alumnos lograron responder correctamente todos los incisos. Las preguntas uno y dos que abordan la idea de mitad, fueron de las que obtuvieron mayor número de alumnos que respondieron correctamente, sin embargo las respuestas de los alumnos que respondieron incorrectamente son interesantes. Las preguntas tres y cuatro que abordaron la idea de representación de fracciones propias e impropias, los alumnos mostraron dificultades en la representación de fracciones impropias. La pregunta seis abordó la misma idea matemática, que es el fraccionamiento en cantidad continua, aquí los alumnos que respondieron incorrectamente mostraron confusión con el sombreado de la figura.

En las preguntas que abordaban la idea de fraccionamiento en cantidad discreta, los alumnos presentaron dificultades para reconocer la parte del todo. La pregunta trece fue la que obtuvo mayor cantidad de respuestas correctas a pesar de que tenía relación en parte con la pregunta uno y dos, la idea matemática que se abordó en esta pregunta fue la equivalencia de fracciones con figuras; algunos de los alumnos indicaron que se fijaron en la forma para relacionar los incisos y que para el inciso que se relacionaba con las preguntas uno y dos, sólo lo hicieron porque sobraba.

La pregunta catorce abordó la misma idea matemática que la pregunta trece, sin embargo aquí hubo mayor cantidad de alumnos que respondieron incorrectamente ya que se pedía encontrar la equivalencia de las fracciones ½ y 3/6, y se necesitaba emplear la multiplicación del numerador y el denominador por el mismo número; muchos de los alumnos respondieron que no sabían cómo hacerlo.

En la pregunta quince se trabajó el fraccionamiento en cantidad continua y algunos de los alumnos se equivocaron al responder este reactivo al considerar que la fracción a encontrar era la de los espejos rotos. Los reactivos dieciséis, diecisiete y dieciocho exploraron la representación decimal de las fracciones en la recta y en la recta numérica, no obstante presentó mayor dificultad para los alumnos ubicar fracciones en la recta numérica.

Resultados del cuestionario inicial: niveles de logro para las fracciones

De acuerdo a los resultados obtenidos, hubo diez alumnos que obtuvieron el nivel de logro alto, ocho alumnos con nivel de logro inicial y ocho en nivel de logro medio. Los diez alumnos con nivel de logro alto mostraron comprensión de las ideas: partición, equivalencia, formación de la unidad, fraccionamiento en cantidad continua y discreta, fraccionamiento en la recta numérica y no numérica. Los alumnos con nivel de logro medio que fueron ocho, comprenden algunas de las ideas básicas, pero no las tres; presentan problemas ya sea con la idea de equivalencia, con la formación de la unidad en fraccionamiento en cantidad continua y discreta y logran ubicar fracciones propias en la recta no numérica y presentan dificultades para ubicar fracciones en la recta numérica. Los alumnos con nivel de logro inicial que fueron ocho, presentaron dificultades con las tres ideas básicas, consideran que la fracción es una partición en donde se divide y toma, divide/come, divide/pinta.

Resultados del cuestionario inicial: Estrategias de resolución de problemas

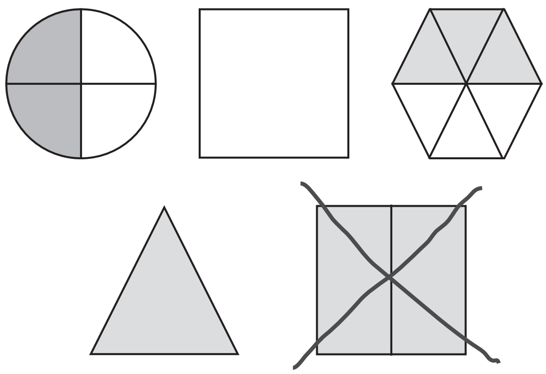
En este análisis se toman en cuenta los tipos de respuesta proporcionados por los alumnos, considerando los procedimientos y la comprensión de las actividades propuestas en el cuestionario inicial. A continuación se da un ejemplo de las ideas matemáticas exploradas en el cuestionario inicial y la categoría de resolución de problema encontrada.

Pregunta 1 del cuestionario inicial de fracciones. Idea matemática: idea de mitad

Categoría: No reconoce la idea de mitad: En esta categoría el estudiante, no reconoce la idea de mitad, cree que es cualquier entero dividido en dos partes puede ser una mitad, no alerta para la idea de parte-parte y parte-todo.

Figura 5. Respuesta de un alumno al cuestionario inicial de fracciones.

1. Marca con una cruz las figuras que representan una mitad.



Nivel de logro: inicial

A continuación se reproduce parte de la entrevista realizada con el alumno, en la cuál explica qué hizo para resolver el problema:

E: A ver alumno, vamos a empezar con tu cuestionario, no. En la pregunta número uno dice: marca con una cruz las figuras que representan una mitad, sí. Tú pusiste que el cuadrado sombreado totalmente y dividido en dos representa una mitad ¿Por qué pusiste que eso representa una mitad?

A: porque como está dividido en dos y está todo sombreado, pues es una mitad completa

E: ¿Cómo que completa?

A: si, que no ves que esta toda pintada y dividida en dos y es una mitad completa

E: a ya veo, y por qué no marcaste las demás figuras

A: porque el círculo está dividido en cuatro. El cuadrado no está dividido, está todo blanco. Y la otra está dividida en seis partes (se refiere al hexágono). Y el triángulo no está dividido sólo pintado todo.

E: ... y si al triángulo se le hubiera puesto una línea que lo dividiera en dos como el cuadrado ¿qué hubieras hecho?

A: ¿Cómo que qué hubiera hecho?

E: o sea, la marcarías como una mitad o no

A: pues claro, porque sería como el cuadrado todo sombreado y dividido en dos

Comentario: El alumno mostró dificultad para identificar una mitad de un entero y para él una mitad tiene que estar sombreada totalmente y dividida en dos. No percibía la equivalencia de fracciones, ya que cuando el entero está subdividido en más de dos partes y la parte sombreada indicaba una mitad, para él eso no representó una mitad.

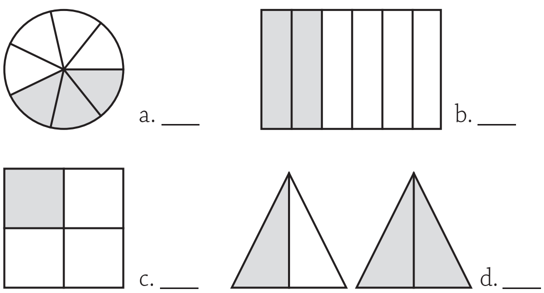
Pregunta 3
Idea matemática: idea de fraccionamiento en cantidad continua.

Categoría: No reconoce la idea de fraccionamiento en cantidad continua.

En esta categoría el estudiante no reconoce la idea de fraccionamiento en cantidad continua. El estudiante presenta dificultad para escribir la fracción que está representada en el dibujo, tanto para las fracciones propias, como para las fracciones impropias.

Figura 6. Respuesta de un alumno al cuestionario inicial de fracciones.

3. Escribe la fracción que representa la parte coloreada:



Nivel de logro: inicial

A continuación se reproduce parte de la entrevista realizada con el alumno, en la cuál explica qué hizo para resolver el problema:

E: ... la pregunta tres dice que escribas la fracción que representa la parte coloreada, me puedes decir ¿por qué en el inciso A pusiste esa respuesta?

A: porque son siete y tres están sombreadas

E: ... y en el inciso C ¿por qué pusiste eso?

A: por lo mismo

E: no te entiendo, ¿cómo que por lo mismo?

A: pues porque son cuatro partes y una está sombreada

E: mmm, ya veo

E: y en el inciso D, ¿por qué pusiste eso?

A: ya le dije (se refiere a las dos explicaciones anteriores)

E: si pero, es que no entendí muy bien

A: porque son dos (señala los dos triángulos) y tres están sombreados

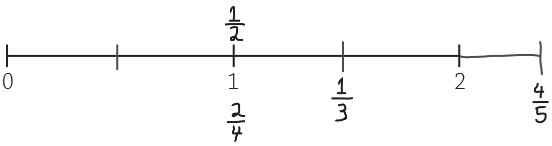
Comentario: El alumno muestra dificultad para representar las fracciones propias e impropias, comprende la fracción como un número, no como una relación. Comprende la fracción como dos números, el número de arriba, como el numerador y el de abajo como el denominador, sin alertar para la cantidad que está representada en las figuras.
A continuación, se incluye otro ejemplo de la respuesta de un estudiante al cuestionario inicial de fracciones que exploró representación decimal en la recta numérica.

Categoría: Representación de las fracciones en la recta numérica tomando como referencia el numerador de las fracciones.

En esta categoría, los estudiantes representan las fracciones en la recta numérica tomando como referencia el numerador de la fracción que se pide que representen en la recta.

Figura 7. Respuesta de un alumno al cuestionario inicial de fracciones.

17. Representa las siguientes fracciones en la recta numérica: 1/2, 2/4, 4/5, 1/3.



Nivel de logro: inicial

A continuación se reproduce parte de la entrevista realizada con el alumno, en la cuál explica qué hizo para resolver el problema:

E: ¿Por qué dividiste así la recta en cinco partes?

A: porque no alcanzaba con estos dos pedazos, por eso lo hice, ¿estoy mal?

E: ¿Por qué colocaste ½ y 2/4 ahí?

A: Porque dividí toda la recta en cinco y hasta acá son dos pedazos (señala 4/5) y tome uno

E: ¿y cómo le hiciste para 2/4?

A: conté cuatro pedazos de los cinco pedazos y tome dos

E: para 1/3 cómo lo hiciste

A: conté tres pedazos

E: mmm, y para 4/5 ¿Cómo le hiciste?

A: conté cinco pedazos y tome cuatro

E: okey, pero mira si los cuento como tú dices, hasta acá son cinco pedazos y no cuatro (señalo hasta donde colocó 4/5)

A: ¿entonces me equivoque?

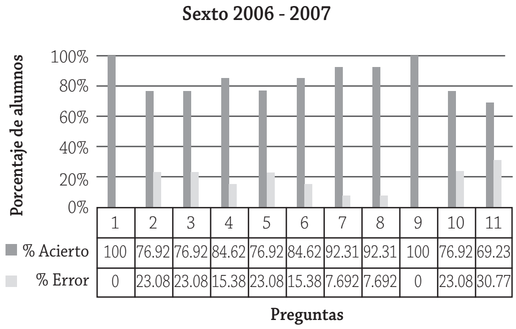
E: mmm, y si te equivocaste ¿dónde pondrías la fracción?

A: ¿en el dos?

Comentario: En este caso el alumno tiene dificultad con la idea de unidad y con la representación decimal en la recta numérica. No percibe que la recta está enumerada y cada numeración corresponde a una unidad, al contrario, concibe la recta enumerada como un todo y marca las fracciones. Divide la recta en cinco pedazos y empieza a representar las fracciones sin considerar ni alertar que la recta ya estaba enumerada.

A continuación se presentan los resultados obtenidos por parejas de estudiantes durante la secuencia didáctica.

Figura 8. Resultados por parejas de estudiantes en la secuencia didáctica.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
% Acierto	100	76.92	76.92	84.62	76.92	84.62	92.31	92.31	100	76.92	69.23
% Error	0	23.08	23.08	15.38	23.08	15.38	7.692	7.692	0	23.08	30.77

De acuerdo a los resultados mostrados en la tabla y la gráfica por parejas, la pregunta uno tuvo el 100% de alumnos que respondieron correctamente así como la pregunta nueve. La idea matemática que se abordó en la pregunta uno fue la de mitad y cuartos. En la pregunta nueve se abordó la idea de representación de fracciones propias en la recta.

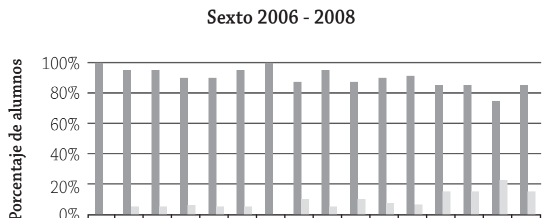
Las preguntas que tuvieron mayor número de parejas que respondieron incorrectamente fueron las preguntas dos, tres, cinco, diez y once. Las ideas matemáticas que abordaron fueron: fraccionamiento en cantidad discreta, la equivalencia de fracciones, representación decimal de las fracciones propias en la recta numérica y representación decimal de las fracciones impropias en la recta numérica respectivamente.

CONCLUSIONES

Los resultados arrojados por la secuencia en papel muestran que el total de los alumnos no presentaron dificultades con la idea de mitad y con la ubicación de fracciones propias en la recta no numérica, por lo tanto estas ideas ya no se ubicaron en el cuestionario final. Sin embargo, los alumnos presentaron dificultades con algunas de las actividades que requerían poner en práctica las ideas matemáticas de fraccionamiento en cantidad discreta, equivalencia de fracciones, ubicación de fracciones propias e impropias en la recta numérica. Con esta última idea matemática a algunos alumnos no les costaba trabajo ubicar fracciones propias cuando ellos mismos establecen sus propios enteros en la recta, como fue la ubicación de fracciones propias en la recta no numérica. La ubicación de fracciones impropias en la recta numérica, les causó confusión a algunos alumnos las terminaciones propia e impropia, lo que derivó en errores al ubicar tales fracciones. Por último, se manejarán en el cuestionario final más actividades con la idea de fraccionamiento en cantidad discreta ya que en sexto grado se omiten tales contenidos que aunque sencillos de comprender, suelen causar dificultades a los alumnos cuando se varían las actividades.

Resultados del cuestionario final de fracciones

Figura 9. Resultados del cuestionario final de fracciones



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
% Acierto	69	69	46	58	0	54	50	46	42	0	38	42	81	42	46	65
% Error	31	31	54	42	0	46	50	54	58	0	62	58	18	58	54	58

Preguntas

El cuestionario final muestra que las actividades que presentaron mayores dificultades para los alumnos fueron la ubicación de fracciones propias e impropias en la recta numérica, sin embargo hubo avances en comparación con el cuestionario inicial como se muestra en la gráfica anterior. Hubo avances en la comprensión de la equivalencia de fracciones así como en el fraccionamiento en cantidad discreta.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados arrojados se percibe un avance conceptual en los estudiantes, pudieron superar algunas dificultades que tenían sobre las fracciones y transitar hacia niveles más altos, lo que reveló que pudieron superar varias de las dificultades iniciales encontradas en el cuestionario inicial. Esto revela que la transición de los números enteros para los números fraccionarios es un proceso lento, que requiere de la compresión de los diversos subconstructos involucrados en el campo conceptual de los números racionales. Esta transición, de los números enteros para los números racionales, también coincide con otra transición que Vergnaud denomina de los problemas de estructura aditiva para los problemas de estructura multiplicativa, dónde se encuentran las fracciones.

Por otro lado, en lo que respecta al modelo matemático propuesto por Kieren se percibe que algunos estudiantes se encuentran en el nivel inicial, es decir, en el nivel más bajo del modelo que expresa un conocimiento básico de las herramientas intuitivas, como las ideas de partición, equivalencia y la formación de la unidad. Ideas esenciales que deben ser trabajadas en la escuela para que los estudiantes puedan transitar para un nivel más alto, caracterizado por el nivel II, donde están las ideas de medida, cociente, razón y operador, nivel que pocos estudiantes de educación básica puedan acceder si la instrucción escolar no les ofrece un modelo conceptual distinto al modelo conceptual parte-todo. Por otro lado, es importante diversificar los soportes de representación y las diferentes representaciones de un mismo concepto matemático, con el objetivo de que los estudiantes desarrollen ideas conceptualmente más elaboradas para que puedan acceder a ideas más poderosas dentro de las matemáticas escolares.

REFERENCIAS

Behr, M. J., Lesh, R, Post, T y Silver, E (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds.). *Adquisition of Mathematical Concepts and Processes* (pp, 91- 126). Nueva York, Estados Unidos. Academic Press.

Bezerra, F.; Magina, S., y Spinillo, A (2002). How to Promote Childrens Understanding of Fractions? An exploratory Study. *Proceedings of the 26th In-*

ternational Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME), 2,89-96, Noewich, Uk, July.

Coxford A. Ellerbruch L. (1975). Fractional Number. In: Payne J.N. (ed.) (1975). Mathematics Learning in early chilhood. Reston (Va): NCTM.

Chaffe-Stengel, P & Noddings, N. (1982). Facilitating symbolic understandings of fractions. *For the Learning of Mathematics,* 3 (2), 42-48.

Chevallard (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné,* Editions la pensee sauvage Francia : Editions la Pensée Sauvage.

Davydov, V.V & Tsvetkovich, Z.H (1991). The objetc sources of the concept of fractions, Psychology Abilities of Primary Children in Learning Mathematics, National Council of Teachers in Mathematics, Reston, Virginia.

Delval, J. (2001). Aprender en la vida y en la escuela Segunda edición: 2001 (reimpresión). Ediciones Morata, S.L.(2006) Mejía Lequerica, 12.28004 - Madrid

Escolano, R. Gairín, J (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. Marzo de 2005, No.1 Revista Iberoamericana de Educación Matemática, España.

Kieren, T. E (1976). On Mathematical cognitive and instructional foundations of rational number, in Lesh, R (ED) Number and Measurement, Columbus, OH. Eric/Smeac, 101-144.

Kieren, T. E (1993). "Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding". En Th. P, Carpenter, E Fennema, Th. A y Romberg, (eds), *Rational Numbers: An Integration of Research*. 49-84.Mahwah, NJ:Erlbaum.

Maia, L., Câmara, M. Câmara, P. (1991). Repensando a aprendizagem de frações: uma experiencia pedagógica. Recife-Brasil SPEC/PADCT/CAPES/MEC.

Nunes, T. y Bryant, P (1997). *Crianças fazendo matemática*. Artes Médicas, Porto Alegre. Brasil. Artes Médicas.

Piaget, J. Inhelder, B y Szemiska, A (1960). *The Child`s Conception of Geometry.* New York, Estados Unidos: Harper & Torchbooks.

Simce (2007). Niveles de logro 4º Básico, Lectura y Educación Matemática, Gobierno de Chile: Ministerio de Educación.

Stengel, Chaffe, P y Nooding, N (1982). Facilitating Symbolic Understanging of Fractions: For The learning of Mathematics 3, 2 November FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.

Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. En T.P. Carpenter, E. Fennema, T.A. Romberg (eds), Rational Numbers. An Integration of Research. Nueva Yersey, Estados Unidos: University of Wisconsin Madison Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Singen-Freeman, K.E. y Goswani, U (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an anlogy task. Cognitive Development,16,811-829.

Vergnaud, G. (1983). Los niños, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza en la escuela primaria, México, Editorial Trillas.

Vergnaud, G. (1990). Psicología Cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática: Algumas questões teóricas e metodológicas In: Caderno do CEM. Ano 2, Número 2,pp19-39.

Zerman, M. (1991). The part-whole schema in the conceptualization of fractions. The Journal of Mathematical Behavior, 10(3),251-259